

适于估计 OD 矩阵的交通检测点 的最优分布¹⁾

周 晶* 盛昭瀚 何建敏

(东南大学经济管理学院 南京 210096)

(* E-mail: xuecq@pub.jionline.com)

杨 海

王长君

(香港科技大学土木工程系 香港)

(公安部交通管理科学研究所 无锡 214151)

摘 要 讨论了适于估计起迄点出行分布矩阵(OD 矩阵)的交通检测点的合理分布问题. 根据检测点应当满足的规则,建立了关于检测点分布的非线性规划模型. 在已知极点间转移概率的前提下,将检测点的分布问题描述成一个平均报酬 Markov 决策过程,并通过转化为一个等价的整数线性规划问题来求解. 最后实例结果表明该模型是有效的、合理的.

关键词 起迄点出行分布矩阵,交通检测点,平均报酬马尔可夫决策过程,整数线性规划.

OPTIMAL LOCATION OF TRAFFIC COUNTING POINTS FOR ESTIMATING OD TRIP MATRIX

ZHOU Jing SHENG Zhaohan HE Jianmin

(School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096)

YANG Hai

(Dept. of Civil & Structural Engineering, the Hong Kong University of Science & Technology, Hong Kong)

WANG Changjun

(Traffic Management Research Institute, Wuxi 214151)

Abstract This paper discusses how to determine the optimal number and locations of traffic counting points in a road network for estimating the origin-destination trip matrix. Based on location rules, a nonlinear programming model for determining the optimal locations of traffic counting points is addressed under a given OD distribution pattern. Such problem can also be described as an average reward Markov decision process (MDP) with additional constraints, which can be equivalent to an integer linear programming problem. The computational example shows that the results obtained are satisfactory.

1) 国家九五科技攻关项目(96-A15-02-03)资助课题.

收稿日期 1997-07-15 收修改稿日期 1998-08-04

Key words Origin-destination trip matrix, traffic counting points, average reward Markov decision process, integer linear programming.

1 引言

起迄点出行分布矩阵(Origin-destination),简称 OD 矩阵,是一项非常重要的交通数据.近年来,国内外已有许多学者致力于通过路段检测流量估计 OD 分布矩阵的研究^[1,2].文[3]归纳了选择检测点应当遵循的四个规则.基于这些规则,在已知 OD 间出行路径的条件下,建立了确定检测点分布的0-1整数规划模型.本文将该问题扩展到无须枚举 OD 间出行路径的一般情形.检测点分布问题被描述为一个平均报酬马尔可夫决策过程.最后,根据文[4]中的基本定理,可通过求解一个等价的线性整数规划问题而获得检测点的最优分布.

2 检测点分布的数学规划模型

2.1 检测点分布问题的描述

考虑交通网络 $G(N, A)$. 根据实际情况,可以将点集 N 分为三类:令 NO 表示所有起点集合; ND 表示所有终点集合; NT 表示所有中间点集合.由于有些点可能是混合型的点,即既是起点又是终点.为便于分析,可以通过引入一个虚拟点将其分开.于是,有 $NO \cap ND = \emptyset, N = NO \cup ND \cup NT$. 设已知一个先验的 OD 出行分布矩阵 $T = (t_{ij})$, 用 $E = (e_{ij})$ 表示转移概率矩阵, e_{ij} 表示从 i 到 j 的转移概率,若 $(i, j) \notin A$, 则令 $e_{ij} = 0$. 事实上,转移概率与 OD 出行量在路网上的分配是密切相关的,我们可以借助与流量分配算法^[5]而间接获得转移概率矩阵.此外,还可以根据先验 OD 矩阵 T 计算每一起点的出行量占总 OD 出行量的比值.对所有非起始点 i , 令 $\beta_i = 0$, 则可得到网络上每一点的初始出行分布 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{|N|})$, 称之为初始分布向量, $|N|$ 表示集合 N 中的元素个数.

2.2 检测点分布的数学规划模型

考虑到用于估计 OD 出行分布矩阵的交通检测点必须分布在路段上,而不是极点上,不妨将每一路段都作为一个假想的极点.即路段 (i, j) 中增加一虚拟极点 k , 这样检测点只能分布在这些虚拟点上.此时转移概率矩阵也将发生变化: $e_{ik} = e_{ij}, e_{kj} = 1, e_{ij} = 0$. 令 NA 表示所有这些虚拟点组成的集合,相应的网络 $G(N, A)$ 也被称为扩充网络 $N = NO \cup ND \cup NT \cup NA$. 为方便起见,引入向量 z 表示检测点的分布. z 中分量取0或1:若极点 i 被检测,对应 $z_i = 1$, 称 i 为测点;否则 $z_i = 0$, 称 i 为非测点.事实上,若 $i \notin NA$, 则必有 $z_i = 0$. 布置检测点时,还应当注意避免重复计数的问题.为此,可以通过改变转移概率来实现.令

$$\hat{e}_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, z_i = 1, \\ 0, & i \neq j, z_i = 1, \\ e_{ij}, & z_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

对一个给定的检测点分布向量 z , 令 $\varphi_j(z)$ 表示从极点 i 出发到达极点 j 的概率, 满足如下递推关系

$$\varphi_{ij}(\mathbf{z}) = \sum_{k \in N} \hat{e}_{ik} \varphi_{kj}(\mathbf{z}), \quad (2)$$

则从 i 到 k 的 OD 对间的流量经过路段 j (即为虚拟点) 的比例为 $\beta_{ik} \varphi_{ij}(\mathbf{z})$, 根据最大流量比规则, 检测点分布向量 \mathbf{z} 的选择应使 $\beta_{ik} \varphi_{ij}(\mathbf{z})$ 尽可能大. 令 \hat{Z} 表示所有满足 OD 覆盖规则的分布向量组成的集合, \hat{l} 表示给定的检测点的数目, 则有如下非线性整数规划模型

$$\text{Maximize } \varphi(\mathbf{z}) = \sum_{j \in N} z_j \sum_{i \in NO} \sum_{k \in ND} \beta_{ik} \varphi_{ij}(\mathbf{z}) = \sum_{j \in NA} z_j \sum_{i \in NO} \beta_i \varphi_{ij}(\mathbf{z}), \quad (3)$$

$$\text{(TCL-P) s. t. } \sum_{j \in NA} z_j = \hat{l}, \quad (4)$$

$$\mathbf{z} \in \hat{Z}, \quad z_j = (0, 1), \quad j \in N. \quad (5)$$

显然, 目标函数(3)是指整个路网上被检测到车总量的期望值, 约束条件(4)保证满足 OD 覆盖规则^[3]. 由于对每一测点即时按(1)式改变其转移概率, 避免了重复计数, 从而也保证满足独立性规则^[3]. 因为目标函数(3)中的 $\varphi_{ij}(\mathbf{z})$ 是一个隐函数, 直接求解(TCL-P)非常困难. 下面将(TCL-P)描述为一个有约束的平均报酬马尔可夫决策过程.

3 马尔可夫决策问题的描述

3.1 测点分布问题的马尔可夫特性描述

已知极点间的转移矩阵 E 和初始出行分布 β 可以将车辆在路网上的运行看作一个马尔可夫点过程. 每一点是否配置检测点即为一个决策, 而将每一点检测到的流量比率看作“报酬”. 定义如下的马尔可夫决策过程: 状态集合 N , 对每一 $i \in N$, 其决策集 $A(i)$ 至多包含两个元素, 即 $A(i) = 2$ 或 $A(i) = 1$. 前者表示将点 i 作为测点, 而后者表示点 i 为非测点. 由此, 可以在检测点分布向量 \mathbf{z} 与一个确定性策略 d 之间建立一一对应的关系

$$\begin{aligned} z_i = 1 &\Leftrightarrow d(i) = 2, \\ z_i = 0 &\Leftrightarrow d(i) = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

这样, 即可通过求解最优马尔可夫策略 d 而间接获得最佳检测点分布向量 \mathbf{z} . 显然, 只有当 $i \in NA$, 才可以有 $A(i) = 2$. 令 p_{iaj} 表示一个平稳马尔可夫过程在状态 i 选择决策 a , 在下一时刻到达状态 j 的转移概率, 可由下式获得

$$p_{iaj} = \begin{cases} e_{ij}, & \text{if } a = 1, \\ 1, & \text{if } a = 2, i = j, \\ 0, & \text{if } a = 2, i \neq j. \end{cases} \quad (7)$$

可见, p_{iaj} 与分布过测点后的转移概率 \hat{e}_{ij} 是一致的. 定义在状态 i 选择决策 a 的报酬为 $r_{ia} = 0, a = 1; r_{ia} = 1, a = 2$. 而 β 相当于该马氏决策过程的初始分布, 即每点的初始出行车辆比例. 另一方面, 注意到检测点分布向量必须满足 OD 覆盖规则, 即 $\mathbf{z} \in \hat{Z}$. 但是, 由一个马尔可夫确定性策略 d 确定的分布向量 \mathbf{z} 不一定能满足这一规则. 为此, 我们首先建立一个确定满足 OD 覆盖规则的最小检测点数目的模型(TCL-P0)

$$\text{(TCL-P0) Min } \sum_{a \in A} z_a \quad (8)$$

$$\text{s. t. } \sum_{a \in A} \delta_{aw} z_a \geq 1, \quad w \in W, \quad (9)$$

$$z_a = 0.1, \quad a \in A. \tag{10}$$

当第 w 对 OD 对间的出行量经过路段 $a, \delta_{aw} = 1$; 否则 $\delta_{aw} = 0$. 求解 (TCL-P0) 获得一个满足 OD 覆盖规则的检测点分布向量 z_0 和测点个数 l_0 . 令

$$NAD = \{i \in NA | z_{0i} = 1\}, \quad NAT = \{i \in NA | z_{0i} = 0\}, \tag{11}$$

其中 z_{0i} 是 z_0 的第 i 个分量. 若 \hat{l} 为预定的测点个数, 则 $\tilde{l} = \hat{l} - l_0$ 为剩余测点个数. 后面将给出 \hat{l} 的确定方法. NAT 将成为检测点的候选点集, 即 $i \in NAT, z_j = 0$. 则问题 (TCL-P) 转变为如下形式

$$(RTCL-P) \text{ Maximize } \varphi(z) = \sum_{j \in NAT} z_j \sum_{i \in NO} \beta_i \varphi_{ij}(z), \tag{12a}$$

$$\text{s. t. } \sum_{j \in NAT} z_j = \tilde{l}, \tag{12b}$$

$$z_j = (0, 1), \quad j \in NAT. \tag{12c}$$

令 $D(\tilde{l}) = \{d | d \text{ 是马尔可夫策略, 恰好在 } \tilde{l} \text{ 个不同的状态选择决策 } a=2\}$. 可以证明问题 (RTCL-P) 与如下的马尔可夫决策问题是等价的 (参见文献 [4, 6])

$$\text{MDP}(D(\tilde{l})) : \max_{d \in D(\tilde{l})} \sum_{i \in NO} \beta_i F_i(d), \tag{13}$$

其中 $F_i(d) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{j \in N} \sum_{a \in A(i)} p_{iaj}(t) r_{ja}$ 表示由策略 d 引导的一个马尔可夫决策过程 (MDP) 的平均期望报酬. 而直接求解这一马尔可夫决策问题 (13) 也是非常困难的, 所幸该马尔可夫决策问题可通过构造一个等价的线性规划问题来求解.

3.2 等价的线性规划问题

对任意的一个马氏策略 ξ 和时间 T , 令

$$x_{ja}(T, \xi) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \beta_i P_{iaj}(t), \quad j \in N, a \in A(j), \tag{14}$$

即表示当状态 j 的决策为 a 时, 在时间段 T 内, 系统到达状态 j 的平均频数. 若 $x_{ja}(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_{ja}(T, \xi)$ 存在, 则 $x_{ja}(\xi)$ 可以解释为在策略 ξ 的引导下, 且状态 j 的决策为 a 时, 在极限时刻 (或长远时刻), 系统的出行到达状态 j 的期望值. 不难证明下列命题 (参见文献 [4, 6]).

命题1. 对任何平稳策略 ξ ,

$$\sum_{i \in NO} \beta_i F_i(\xi) = \sum_{j \in NAT} x_{j2}(\xi). \tag{15}$$

命题2. 令 z 是一个分布向量, d 是由 z 根据式 (8) 定义的策略, 则

$$\sum_{j \in NO} \beta_j \varphi_{ji}(z) = x_{i2}(d(z)). \tag{16}$$

式 (16) 说明 $x_{i2}(d(z))$ 给出了出行车在测点 i 被观测到的期望值.

Kallenberg^[4] 建立了一个平稳的马氏决策过程与一个线性规划问题之间的关系. 据此可有如下的定理:

定理1. 考虑整数规划问题

$$(MIP-1) \text{ Maximize } \sum_{i \in N} x_{i2}, \tag{17a}$$

$$\text{s. t. } \sum_a x_{ia} - \sum_j \sum_a p_{jai} x_{ja} = 0, \quad i \in N, \tag{17b}$$

$$\sum_a x_{ia} + \sum_a y_{ia} - \sum_j \sum_a p_{jai} y_{ja} = 0, i \in N, \quad (17c)$$

$$x_{i2} \leq z_i, \quad i \in N, \quad (17d)$$

$$\sum_i z_i = \tilde{l}, \quad (17e)$$

$$x_{ia}, y_{ia} \geq 0, z_i = (0, 1), \quad i \in N, a \in A(i). \quad (17f)$$

1) 若 (x^*, y^*, z^*) 是 (MIP-1) 的最优解, 则 z^* 是 (RTCL-P) 的最优解, $d(z^*)$ 是 MDP ($D(\tilde{l})$) 的最优策略;

2) 若 z^* 是 (RTCL-P) 的最优解, 且 $d^* = d(z^*)$, $x^* = x(d^*)$, 则存在向量 y^* 使得 (x^*, y^*, z^*) 成为 (MIP-1) 的最优解.

由此定理可知, 若 (x^*, y^*, z^*) 是问题 (MIP-1) 的最优解, 则 $d^* = d(z^*)$ 即为相应的最优策略, 从而 $x^* = x(d^*)$. 最后 (MIP-1) 可化简为

$$(MIP-2) \text{ Maximize } \sum_{i \in NAT} x_{i2}, \quad (18a)$$

$$\text{s. t. } x_{i2} + y_{i1} - \sum_{j \in NDU} p_{j1i} y_{j1} = 0, i \in NAT, \quad (18b)$$

$$x_{i1} + y_{i1} - \sum_{j \in NDU} p_{j1i} y_{j1} = 0, i \in NDU, \quad (18c)$$

$$y_{i1} - \sum_{j \in NDU} p_{j1i} y_{j1} = \beta_i, i \in NO, \quad (18d)$$

$$y_{i1} - \sum_{j \in NDU} p_{j1i} y_{j1} = 0, i \in NAT, \quad (18e)$$

$$\sum_{i \in NAT} z_i = \tilde{l}, \quad (18f)$$

$$0 \leq x_{i2} \leq z_i, \quad z_i = (0, 1), \quad i \in NAT, \quad (18g)$$

$$x_{i1} \geq 0, \quad i \in NDU, \quad y_{i1} \geq 0, \quad i \in NDU. \quad (18h)$$

在 (MIP-2) 中仅存的变量, 可作如下的解释. 变量 x_{i2} ($i \in NAT$) 表示在极点 i 所能观测到的流量比例, 式 (18g) 表明如果极点 i 非测点, 则 $x_{i2} = 0$. 因此, (MIP-2) 的目标函数可解释为在所有检测点观测到的流量比例. 而对 $i \in NDU$, 且是非测点, 变量 y_{i1} 表示出行者在被“吸收”或被观测之前, 期望到达极点 i 的比例. 对 $i \in NDU$, 变量 x_{i1} 表示没有被新测点观测到而到达吸收点的比例, 实际上即为漏检的流量比例. 特别是, 对 $i \in NAD$, $\sum_{i \in NAD} x_{i1}$ 即为满足 OD 覆盖规则的检测点所观测到的流量比例. 这一数值在后面分析检测点个数时是非常有用的.

3.3 检测点数量的确定

设预先确定的观测流量比例为 α , 且已知满足 OD 覆盖规则的测点数目 l_0 , 则构造如下整数线性规划模型来确定所需增加的测点数目 \tilde{l} .

$$(MIP-3) \text{ Minimize } \tilde{l}(z) = \sum_{i \in NAT} z_i, \quad (19a)$$

$$\text{s. t. } \sum_{i \in NAT} x_{i2} + \sum_{i \in NAT} x_{i1} \geq \alpha, \quad (19b)$$

$$(18b) \sim (18e), (18g) \sim (18h).$$

4 实例分析

考虑如图1所示的路网,转移概率由 Dial^[5]的算法计算而得. 首先用分支定界法求解

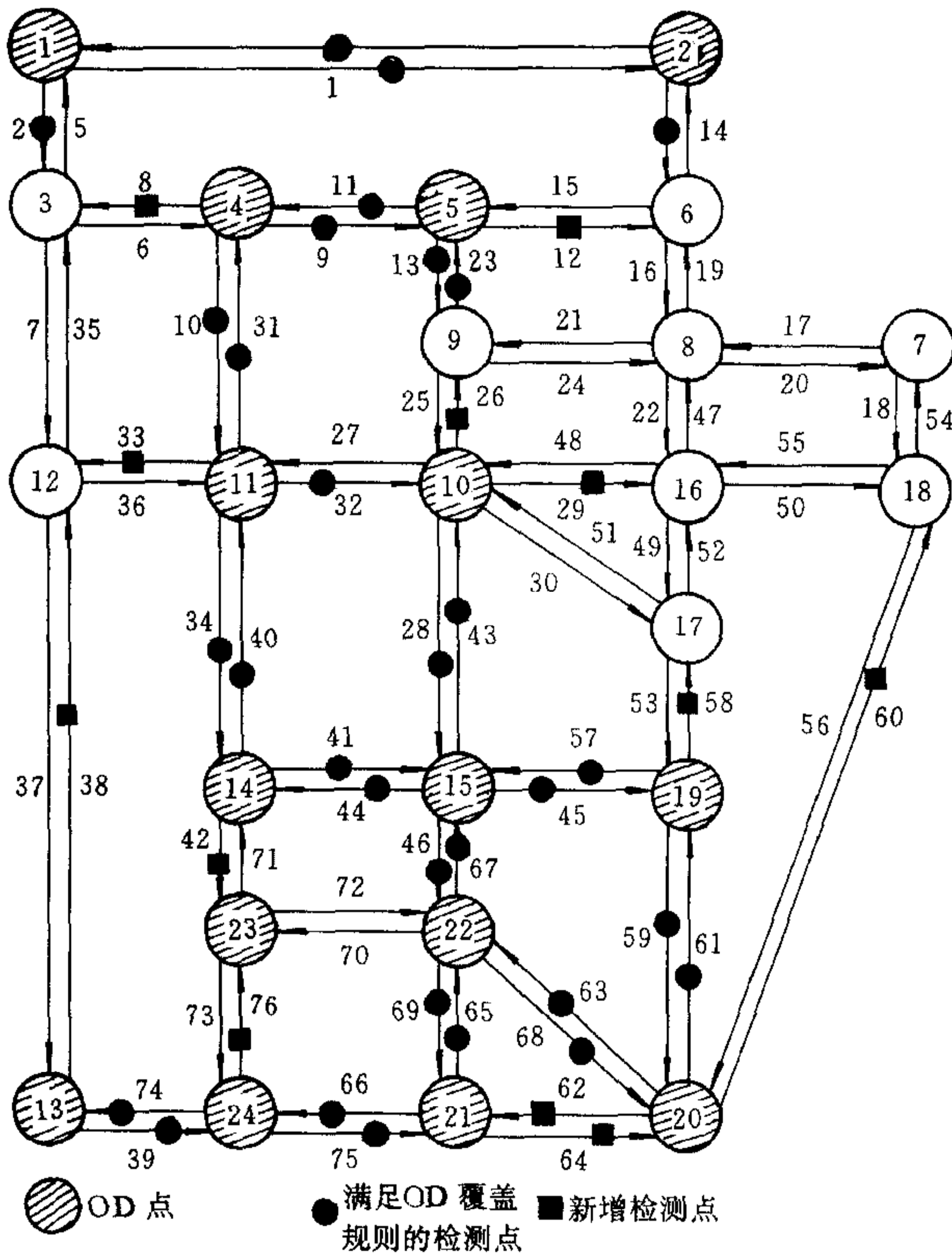


图1 路网检测点分布示意图

模型 (TCL-P0), 可获得满足 OD 覆盖规则的检测点个数为 $l_0 = 38$, 而相应的检测点分布为路段编号: 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 13, 14, 23, 27, 28, 31, 32, 34, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 57, 59, 61, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 75. 在图1中用黑园点标识.

由表1可知, 这部分的测点可观测到网络上80%的流量. 我们给出不同的

表1 不同测点个数下的计算结果

\tilde{l}	$x_{i_2}^{NAT}$	$x_{i_1}^{ND}$	$x_{i_1}^{NAD}$	$x_{i_1}^{NAD} + x_{i_2}^{NAT}$
0	0.000	0.193	0.806(0)	0.806
5	0.187	0.114	0.699(0)	0.886
8	0.267	0.079	0.654(3)	0.921
10	0.315	0.057	0.657(7)	0.980
12	0.355	0.020	0.625(7)	0.980
15	0.375	0.000	0.624(7)	0.999
20	0.375	0.000	0.624(7)	0.999

注: 括号中的数字表示 x_{i_1} 为零的个数

新增测点数目 \tilde{l} , 分别求解 (MIP-2) 所得结果列于表1, 其中 $x_{i_2}^{NAT} = \sum_{i \in NAT} x_{i_2}$ 表示由 \tilde{l} 个新测点所观测到的流量比; $x_{i_1}^{ND} = \sum_{i \in ND} x_{i_1}$ 表示未被测点观测到而到达迄点的流量比; $x_{i_1}^{NAD} = \sum_{i \in NAD} x_{i_1}$ 表示由 l_0 个旧测点所观测到的流量比; $x_{i_2}^{NAT} + x_{i_1}^{NAD}$ 表示由所有新旧测点观测到的总流量比. 另一方面, 由于新测点的增加, 会使得原有的旧测点变得多余. 经过分析, 选择 $\tilde{l} = 12$ 时的分布结果. 去掉 NAD 中7个旧测点 ($x_{i_1} = 0$). 最终的测点数目为43. 其中去掉的测点为: 5, 14, 27, 36, 37, 71, 73; 新增的测点为8, 12, 26, 29, 33, 38, 42, 58, 60, 62, 64, 76, 在图4中用黑方块标识. 我们也可根据模型 (MIP-3) 来确定新增测点的数目. 给出几个不同的 α 值, 得到相应的 \tilde{l} 值如下所示

α	0.80	0.85	0.90	0.95
\tilde{l}	2	4	6	11

5 结论

本文根据文[3]中归纳的估计 OD 矩阵的检测点的分布规则,将一个交通检测点的最优分布问题描述为一个马尔可夫决策问题(MDP).又因为这一问题的特殊性,后者可以转化为一个等价的整数线性规划问题来求解.同时,我们还给出了确定检测点数目的数学模型.最后给出一个实例,经过计算分析,说明所得出的测点分布是合理的.本文所提出的方法,同样适用于其他类似的检测点分布问题,如商业零售点的分布等问题.因此文中所提出的方法具有广泛的应用背景.

参 考 文 献

- 1 Cascetta, E. Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: A generalized least squares estimator. *Transportation Research*, 1984, **18B**:289~299
- 2 Yang, H., Iida, Y. Sasaki, Y. Analysis of the reliability of an origin-destination trip matrix estimated from traffic counts. *Transportation Research*, 1991, **25B**: 351~363
- 3 周晶等. 交通检测点的分布规则及其数学模型. 东南大学学报, 1998, (6):59~63
- 4 Kallenberg, L. C. M., Linear Programming and Finite Markovian Control Problem. Amsterdam: Mathematical centrum, 1983. 95~159
- 5 Dial R B. A probabilistic multipath traffic assignment algorithm which obviates path enumeration. *Transportation Research*, 1971, **5**:83~111
- 6 Berman, O., Krass, D, Xu C W. Locating discretionary service facilities based on probabilistic customer flows, *Transportation Science*, 1995, **29**:276~290

周 晶 生于1963年,1986年获东南大学自动控制理论及应用专业硕士学位,现为东南大学经济管理学院副教授.主要研究方向为最优化理论及其应用、博弈论及其应用研究、决策分析与决策支持.

盛昭瀚 生于1944年,1967年毕业于南京大学数学系.现为东南大学教授、博士生导师、东南大学副校长.主要研究方向为决策分析与决策支持、博弈论及其应用研究、企业集团与产业组织研究、复杂系统理论与应用研究.

杨 海 生于1964年,1989年和1992年分别获得日本京都大学交通工程专业的硕士学位和博士学位.现为香港科技大学土木工程系助理教授.主要研究方向为交通流理论分析、交通系统的规划与管理、交通收费问题的研究等.