第26卷 第3期
2000年5月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 26, No. 3
May, 2000

基于神经网络的一类非线性系统自适应输出跟踪[1)]

佟绍成　　　　李庆国　柴天佑
（辽宁工学院基础部　锦州　121001）　（东北大学自动化研究中心　沈阳　110006）

摘　要　针对一类未知非线性系统，提出了一种输出反馈控制方法. 首先，在假设系统状态已知情况下设计状态反馈控制器，实现跟踪性能；然后，在系统状态不完全可测的情况下，通过设计高增益观测器对系统的状态进行估计，实现输出反馈控制器设计. 证明了所设计的输出反馈控制器可以获得状态反馈控制器的性能.

关键词　神经网络，非线性系统，自适应控制，高增益观测器，输出反馈.

ADAPTIVE OUTPUT TRACKING OF NONLINEAR SYSTEMS USING NEURAL NETWORKS

TONG Shaocheng
(*Liaoning Institute of Technology, Jinzhou*　121001)
LI Qingguo　CHAI Tianyou
(*Automation Research Center of Northeastern University, Shenyang*　110006)

Abstract　An adaptive output feedback control scheme is developed for a class of nonlinear unknown systems. In this scheme, we first suppose that the states of the systems are known and design a state feedback controller to realize the tracking performance. Then we design the output feedback controller by introducing the estimator of the states for the case where system states are unknown. It is proved that this output feedback controller can recover the tracking performance obtained by the state feedback controller.

Key words　Neural networks, nonlinear systems, adaptive control, output feedback.

1　引言

现实世界中，几乎所有的控制系统都是非线性系统，而如何实现非线性系统控制是控制界所面临的一大难题. 神经网络的出现，特别是关于神经网络对一般非线性函数具有逼

1）国家自然科学基金资助项目.
收稿日期　1997-02-12　　收修改稿日期　1998-11-24

近能力的研究取得了突破性进展以后,基于神经网络的非线性系统的控制研究得到了广泛的关注,并取得了可喜的成果.但目前所提出的控制方法中,均假设了系统的状态是可测的.而实际控制系统中,状态是部分可测或完全不可测的,如何在此情况下实现非线性系统的自适应控制,无疑是一项颇有意义的工作.

本文针对一类非线性未知系统的输入输出模型,提出一种输出反馈自适应控制方法.首先,通过对输入进行积分,获得增广状态空间模型,并在假设状态已知的情况下,利用神经网络逼近未知函数,设计状态反馈控制器;然后,在系统状态不可测的情况下,通过设计高增益观测器,估计系统输出的导数,实现自适应控制器设计.为避免引入高增益观测器而产生的峰值现象,通过对控制器及参数估计进行饱和处理.考虑到神经网络建模误差的存在,引入 H^{∞} 补偿控制器以减小对输出跟踪误差的影响.

2 模型描述及控制问题

考虑如下的单输入-单输出非线性系统

$$y^{(n)}=f(y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)},u,u^{(1)},\cdots,u^{(m-1)})+g(y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)},u,u^{(1)},\cdots,u^{(m-1)})u^{(m)}, \tag{1}$$

其中 y,u 分别为系统的输出和输入,$f(\cdot),g(\cdot)$ 为 $D\subset R^{m+n-2}$ 上的未知连续函数,$m<n$.

对于给定的有界参考信号 y_r,假设 $y_r,y_r^{(1)},\cdots,y_r^{(n-1)}$ 均有界可测,定义跟踪误差为 $e=y-y_r$. 记

$\underline{e}=[e,e^{(1)},\cdots,e^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$,$\underline{y}=[y,y^{(1)},\cdots,y^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$,$\underline{u}=[u,u^{(1)},\cdots,u^{(m-1)}]^{\mathrm{T}}$,$\underline{y}_r=[y_r,y_r^{(1)},\cdots,y_r^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$.

对系统(1)的输入端加入 m 个积分器,取积分器的状态为

$$z_1=u,\quad z_2=u^{(1)},\cdots,\quad z_m=u^{(m-1)}.$$

令 $x_1=y$, $x_2=y^{(1)},\cdots,x_n=y^{(n-1)}$, $v=u^{(m)}$,则系统(1)可表示成如下的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, \quad 1\leqslant i\leqslant n-1, \\ \dot{x}_n = f(\underline{y},\underline{z})+g(\underline{y},\underline{z})v, \\ \dot{z}_i = z_{i+1}, \quad 1\leqslant i\leqslant m-1, \\ \dot{z}_m = v, \\ y = x_1, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\underline{z}=[z_1,\cdots,z_m]^{\mathrm{T}}$,$v$ 为增广系统的控制输入.选择积分器的初始状态 $\underline{z}(0)\in \boldsymbol{Z}_0\subset \boldsymbol{R}^m$.

假设1. $\forall\ \underline{y}\in \boldsymbol{R}^n,\underline{z}\in \boldsymbol{R}^m$,$|g(\underline{y},\underline{z})|>0$.

假设2. 对于任意的初始状态 $\underline{z}(0)\in \boldsymbol{Z}_0\subset \boldsymbol{R}^m$,当 $\underline{y}$ 有界时,状态 $\underline{z}$ 必有界.

控制任务是利用系统的输入和输出,设计自适应神经网络控制器 $v=v(\underline{y},\underline{z}|\boldsymbol{w}_f,\boldsymbol{w}_g)$ 及参数向量 $\boldsymbol{w}_f,\boldsymbol{w}_g$ 的自适应律,满足:

1)闭环系统中所涉及的所有变量一致有界;

2)对于给定的减弱水平 $\rho>0$,输出跟踪误差取得 H^{∞} 性能指标,即

$$\int_0^T \underline{e}^{\mathrm{T}}Q\underline{e}\mathrm{d}t \leqslant \underline{e}^{\mathrm{T}}(0)P\underline{e}(0)+\frac{1}{\eta_1}\widetilde{\boldsymbol{w}}_f^{\mathrm{T}}(0)\widetilde{\boldsymbol{w}}_f(0)+\frac{1}{\eta_2}\widetilde{\boldsymbol{w}}_g^{\mathrm{T}}(0)\widetilde{\boldsymbol{w}}_g(0)+\rho^2\int_0^T w^{\mathrm{T}}w\mathrm{d}t. \tag{3}$$

3　模糊自适应状态反馈控制的设计与稳定性分析

本节讨论在状态($\underline{y}$,$\underline{z}$)可测的情况下,应用神经网络和 H^{∞} 控制构造状态反馈自适应控制器.由于

$$\begin{cases} e_1 = y - y_r = x_1 - y_r, \\ e_2 = y^{(1)} - y_r^{(1)} = x_2 - y_r^{(1)}, \\ \vdots \\ e_n = y^{(n-1)} - y_r^{(n-1)} = x_n - y_r^{(n-1)}, \\ \underline{e} = [e_1, \cdots, e_n]^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{4}$$

则式(2)可表示为如下的状态方程

$$\dot{\underline{e}} = B\underline{e} + \boldsymbol{b}\{f(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z}) + g(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z})v\}, \quad \dot{\underline{z}} = B_1\underline{z} + \boldsymbol{b}_1 v, \tag{5),(6}$$

其中(B,$\boldsymbol{b}$)和(B_1,$\boldsymbol{b}_1$)为可控标准型.

选取矩阵 K 使得 $B_m=B-\boldsymbol{b}K$ 为 Hurwitz 矩阵,即它的特征值都位于左半平面,将式(5)化为

$$\dot{\underline{e}} = B_m\underline{e} + \boldsymbol{b}\{K\underline{e} + f(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z}) + g(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z})v - y_r^{(n)}\}. \tag{7}$$

由于 $f(\cdot)$和 $g(\cdot)$是未知的连续函数,为此用 RBF 网络 $\hat{f}(\underline{e}+\underline{y}_r,\underline{z}|\boldsymbol{w}_f)$,$\hat{g}(\underline{e}+\underline{y}_r,\underline{z}/\boldsymbol{w}_g)$来分别逼近 $\hat{f}(\underline{e}+\underline{y}_r,\underline{z})$和 $g(\underline{e}+\underline{y}_r,\underline{z})$,RBF 网络的形式如下:

$$\hat{f}(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z}|\boldsymbol{w}_f) = \sum_{i=1}^{N} w_{fi}\phi_i(\underline{y}, \underline{z}) = \boldsymbol{w}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\underline{y}, \underline{z}), \tag{8}$$

$$\hat{g}(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z}|\boldsymbol{w}_g) = \sum_{i=1}^{N} w_{gi}\phi_i(\underline{y}, \underline{z}) = \boldsymbol{w}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\underline{y}, \underline{z}). \tag{9}$$

应用它们来分别逼近式(7)中的 $f(\cdot)$和 $g(\cdot)$,得

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} = & B_m\underline{e} + \boldsymbol{b}\{K\underline{e} + \hat{f}(\underline{e}+\underline{y}_r,\underline{z}|\boldsymbol{w}_f) + \hat{g}(\underline{e}+\underline{y}_r,\underline{z}|\boldsymbol{w}_g)v + (f-\hat{f}) + (g-\hat{g})v + y_r^{(n)}\} = \\ & B_m\underline{e} + \boldsymbol{b}\{K\underline{e} + \tilde{\boldsymbol{w}}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\underline{e}+\underline{y}_r,\underline{z}) + \tilde{\boldsymbol{w}}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\underline{e}+\underline{y}_r,\underline{z})v - y_r^{(n)} + w\}, \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{w}}_f=\boldsymbol{w}_f-\boldsymbol{w}_f^*$,$\tilde{\boldsymbol{w}}_g=\boldsymbol{w}_g-\boldsymbol{w}_g^*$ 为参数误差,$w=(f-\hat{f})+(g-g)v$ 为逼近误差.取等价控制器为

$$v_1 = \frac{1}{\boldsymbol{w}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot)}[-K\underline{e} + y_r^{(n)} - \boldsymbol{w}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot)]. \tag{11}$$

由于神经网络建模误差及各种干扰的存在,等价控制器不足以保证闭环系统的稳定性和控制性能指标的实现,为此引入鲁棒控制项用于削弱逼近误差对系统输出误差的影响,令

$$v_2 = -\frac{1}{\lambda\boldsymbol{w}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot)}\underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}, \tag{12}$$

式中 $P=P^{\mathrm{T}}>0$,且满足下面的 Recciti 方程

$$PB_m + B_m^{\mathrm{T}}P + Q - \frac{2}{\lambda}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}P + \frac{2}{\rho^2}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}P = 0. \tag{13}$$

根据文献[4],上述 Recciti 方程存在解的条件是$2\rho^2>\lambda$.最后合成的神经网络控制器为 $v=v_1+v_2$.将 v 代入式(10),则有

$$\dot{\underline{e}} = B_m\underline{e} + \boldsymbol{b}\{K\underline{e} + \widetilde{\boldsymbol{w}}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\underline{e} + \underline{y}_r, \boldsymbol{z}) + \widetilde{\boldsymbol{w}}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\underline{e} + \underline{y}_r, \boldsymbol{z})v_1 - y_r^{(n)} + w - \frac{1}{\lambda}\underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\}. \tag{14}$$

取神经网的可行域为

$$\Omega_1 = \{\boldsymbol{w}_f \mid \|\boldsymbol{w}_f\|^2 \leqslant m_f\}, \quad \Omega_{\delta 1} = \{\boldsymbol{w}_f \mid \|\boldsymbol{w}_f\|^2 \leqslant m_f + \delta_1\},$$

$$\Omega_2 = \{\boldsymbol{w}_g \mid \|\boldsymbol{w}_g\|^2 \leqslant m_g\}, \quad \Omega_{\delta 2} = \{\boldsymbol{w}_g \mid \|\boldsymbol{w}_g\|^2 \leqslant m_g + \delta_2\},$$

其中 m_f, m_g, δ_i 为设计者所决定的设计参数.

参数自适应律调节律为

$$\dot{\boldsymbol{w}}_f = \begin{cases} \eta_1 P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\underline{y}, \underline{z})v, & \text{if} \quad (\boldsymbol{w}_f \in \boldsymbol{\Omega}_1) \text{ or } (\boldsymbol{w}_f \notin \boldsymbol{\Omega}_1 \text{ and } \underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\underline{y}, \underline{z}) \leqslant 0), \\ P_{r1}[\cdot], \text{ otherwise}. \end{cases} \tag{15}$$

$$\dot{\boldsymbol{w}}_g = \begin{cases} \eta_2 P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\underline{y}, \underline{z})v, & \text{if} \quad (\boldsymbol{w}_g \in \Omega_2) \text{ or } (\boldsymbol{w}_g \notin \Omega_2 \text{ and } \underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\underline{y}, \underline{z})v \leqslant 0), \\ P_{r2}[\cdot], \text{ otherwise}. \end{cases} \tag{16}$$

投影算子 $P_{ri}[\cdot]$定义为

$$P_{r_1}[\cdot] = \eta_1\underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\cdot) - \eta_1\frac{(\|\boldsymbol{w}_f\|^2 - M_1)\underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\cdot)}{\delta_1\|\boldsymbol{w}_f\|^2}\boldsymbol{w}_f, \tag{17}$$

$$P_{r_2}[\cdot] = \eta_2\underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\cdot)v - \eta_2\frac{(\|\boldsymbol{w}_g\|^2 - M_2)\underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\cdot)v}{\delta_1\|\boldsymbol{w}_g\|^2}\boldsymbol{w}_g. \tag{18}$$

用下面的定理给出这种控制器的性质.

定理1. 考虑非线性系统(1),如果采用控制器(11),(12)、参数向量的自适应律(15)和(16),而且假设1和2成立,则总体控制方案可以保证闭环系统具有如下性能:

1) $\boldsymbol{w}_f \in \boldsymbol{\Omega}_{\delta_1}, \boldsymbol{w}_g \in \boldsymbol{\Omega}_{\delta_2}, x, z, v \in \boldsymbol{L}_\infty$;

2) 对于给定的减弱水平 ρ,取得 H^∞跟踪性能(3).

4 自适应输出反馈控制的设计

本节研究如何在系统状态不可测的情况下实现系统的输出反馈控制. 因此,需要对控制器中所涉及的变量进行估计,由于 $\underline{z}$ 可以通过对控制 v 积分获得,而 $\underline{e}$ 只有通过估计获得,因此设计如下的观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_i = \hat{e}_{i+1} + \dfrac{\alpha_i}{\varepsilon}(e_1 - \hat{e}_1), \quad 1 \leqslant i \leqslant \quad (n-1), \\ \dot{\hat{e}}_n = \dfrac{\alpha_n}{\varepsilon}(e_1 - \hat{e}_1), \end{cases} \tag{19}$$

其中 ε 是后面将设计的比较小的正参数,参数 $\alpha_i > 0$是使得如下的多项式

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \tag{20}$$

为稳定的,即所有的根在左半平面内. 高增益观测器定义为

$$\psi_1 = \underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\cdot), \quad \psi_2 = \underline{e}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\boldsymbol{\phi}(\cdot)v. \tag{21}$$

由于高增益观测器的引入,闭环系统将出现冲击现象. 为了避免这种现象,在感兴趣的范围内对控制器 v 及向量 ψ_i 进行饱和处理. 具体作法是,假定所有的初始值有界,且 $\boldsymbol{w}_f(0) \in \boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{w}_g(0) \in \Omega_2, \underline{e}(0) \in \boldsymbol{E}_0, \underline{z}(0) \in \boldsymbol{Z}_0$,其中 $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{Z}_0$为紧集. 定义

$$c_1 = \max\nolimits_{\underline{e} \in E_0}(\underline{e}^{\mathrm{T}}P\underline{e}), \quad c_2 = \frac{1}{2\eta_1}\max\nolimits_{\boldsymbol{w}_f^* \in \Omega_f, \boldsymbol{w}_f \in \Omega_{\delta 1}}(\widetilde{\boldsymbol{w}}_f^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{w}}_f),$$

$$c_3 = \frac{1}{2\eta_2} \max_{w_g^* \in \Omega_g, w_g \in \Omega_{\delta_2}} (\widetilde{w}_g^{\mathrm{T}} \widetilde{w}_g).$$

令 $c_4 > (c_1 + c_2 + c_3)$，则对于 $t \geqslant 0$，设 $\underline{e}(0) \in E = \{\underline{e}^{\mathrm{T}} P \underline{e} \leqslant c_4\}$. 由假设2可知，存在紧集 Z，如果 $\underline{z}(0) \in Z_0$ 且 $\underline{e}(t) \in E$，有 $\underline{z}(t) \in Z$. 由于 v 及 ψ_i 是紧集 $E \times Z \times \Omega_{\delta_1} \times \Omega_{\delta_2}$ 上的连续函数，则它们的最大值存在，记为

$$S = \max |v(\underline{e}, \underline{y}_r, \underline{z}, \psi_f, \psi_g)|, \quad S_i = \max |\psi_i(\underline{e}, \underline{z}, \theta_f, \theta_g)|_{(i=1,2)}.$$

定义饱和函数

$$v^s(\underline{e}, \underline{y}_r, \underline{z}, \psi_f, \psi_g) = S \mathrm{sat}(v/S), \ \psi_i^s(\underline{e}, \underline{y}_r, \underline{z}) = S_i \mathrm{sat}(\psi_i / S_i), \qquad (22),(23)$$

其中 sat(·)为饱和函数.

通过引入饱和函数，对于任意的 $\underline{e}(0) \in E_0, \underline{z}(0) \in Z_0, \psi_f(0) \in \Omega_1, \psi_g(0) \in \Omega_2$，有 $|v| \leqslant S, |\psi_i| \leqslant S_i$. 进一步，为消除由于实现观测器而产生的峰值现象，将式(19)变为如下的奇异摄动模型

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{q}_i = q_{i+1} + \alpha_i (e_1 - q_1), & 1 \leqslant i \leqslant (n-1), \\ \varepsilon \dot{q}_n = \alpha_n (e_1 - q_1), \end{cases} \tag{24}$$

其中 $\dot{e}_i = \frac{q_i}{\varepsilon^{i-1}} (1 \leqslant i \leqslant n)$.

以上完成了观测器的设计. 基于观测器的输出反馈控制策略如下：

$$\begin{cases} v = v^s(\hat{\underline{e}}, \underline{y}_r, \underline{z}, w_f, w_g), \\ z_i = z_{i+1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m-1), \\ z_m = v. \end{cases} \tag{25}$$

参数的自适应律是把式(15)和(16)中的 $\underline{e}^{\mathrm{T}} P b \phi$ 换成 ψ^s，v 换成 v^s 而得到.

定义广义观测误差

$$\xi_i = \frac{e_i - \hat{e}_i}{\varepsilon^{i-1}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{26}$$

令 $\xi = [\xi_1, \cdots, \xi_n]^{\mathrm{T}}$，则闭环系统(5)和(6)可表示为如下的奇异摄动模型

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} =& B_m \underline{e} + b\{K\underline{e} + w_f^{\mathrm{T}} \phi(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z}) + \\ & w_g^{\mathrm{T}} \phi(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z}) v^s(\underline{e} - D(\varepsilon)\xi, \underline{y}_r, \underline{z}, w_f, w_g) - y_r^{(n)} + w, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\dot{\underline{z}} = B_1 \underline{z} + b_1 v^s(\underline{e} - D(\varepsilon)\xi, \underline{y}_r, \underline{z}, w_f, w_g), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\xi} =& (B - HC)\xi + \varepsilon b\{w_f^{\mathrm{T}} \phi(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z}) + \\ & w_g^{\mathrm{T}} \phi(\underline{e} + \underline{y}_r, \underline{z}) v^s(\underline{e} - D(\varepsilon)\xi, \underline{y}_r, \underline{z}, w_f, w_g) - y_r^{(n)} + w\}, \end{aligned} \tag{29}$$

其中 $H = [\alpha_1, \cdots, \alpha_n]^{\mathrm{T}}$，$D(\varepsilon)$ 是对角阵，其对角线上第 i 个元素为 ε^{n-i}. 由于矩阵 $B - HC$ 的特征方程恰好为式(20)，因此它是 Hurwitz 矩阵.

下面定理给出了输出反馈控制器的性质.

定理2. 考虑式(1)的控制对象，采用输出反馈控制(25). 如果假设1和2成立且满足 $w_f(0) \in \Omega_1, w_g(0) \in \Omega_2, \underline{e}(0) \in E_0, \underline{z}(0) \in Z_0$，则存在 $\varepsilon^* > 0$，当 $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ 时，有如下性质：

1) $w_f \in \Omega_{\delta_1}, w_g \in \Omega_{\delta_2}, x, z, v \in L_\infty$；

2) 对于给定的干扰消弱水平 ρ，输出跟踪误差能恢复 H^∞ 跟踪性能指标.

证明. 下面分三步给出定理的证明.

1) 证明快变量 ξ 在有限的时间内衰减到 $O(\varepsilon)$ 的水平，而慢变量仍保持在我们感兴趣

的集合内.这等价于证明下面的命题.

设 $\bar{\boldsymbol{b}}_1$ 是一个正常数,取 $\boldsymbol{b}_1$ 满足 $0<\bar{\boldsymbol{b}}_1<\boldsymbol{b}_1<c_4$,并取初始值为

$$(\underline{\boldsymbol{e}}(0),\underline{\boldsymbol{z}}(0),\boldsymbol{w}_f(0),\boldsymbol{w}_g(0)) \in \boldsymbol{A} = E\{\underline{\boldsymbol{e}}(t)\,|\,\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}P\underline{\boldsymbol{e}} \leqslant \bar{b}_1\} \times \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{\Omega}_{\delta_1} \times \boldsymbol{\Omega}_{\delta_2}.$$

记 T_2 表示 $(\underline{\boldsymbol{e}}(t),\underline{\boldsymbol{z}}(t),\boldsymbol{w}_f(t),\boldsymbol{w}_g(t))$ 首次离开集合 $\boldsymbol{A}$ 的时间,则 $T_2>0$,对于充分小的 $\varepsilon>0$,存在有限时间 T_1,使得对于任意 $t\in[T_1,T_2)$ 时,$\|\xi\|\leqslant K\varepsilon$.

考虑 Lyapunov 函数 $V=\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}P\underline{\boldsymbol{e}}$,对 V 求微分,并结合式(36)得

$$\dot{V} = -\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}Q\underline{\boldsymbol{e}} + 2\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{b}\{K\underline{\boldsymbol{e}} - y_r^{(n)} + \boldsymbol{w}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot) + \boldsymbol{w}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot) + \boldsymbol{w}\}. \tag{30}$$

由于 $v^s,\boldsymbol{w}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(\cdot),\boldsymbol{w}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(\cdot)v^s,w$ 都是有界函数,不妨设

$$\|K\underline{\boldsymbol{e}} - y_r^{(n)} + \boldsymbol{w}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot) + \boldsymbol{w}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot)v^s + w\| \leqslant K_1, \tag{31}$$

所以

$$\dot{V} \leqslant -\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}Q\underline{\boldsymbol{e}} + 2K_1\|P\boldsymbol{b}\|\|\underline{\boldsymbol{e}}\| \leqslant -2\gamma_1 V + 2\beta_1\sqrt{V}, \tag{32}$$

其中 $\gamma_1=\dfrac{1}{2\lambda_{\max}(P)}$,　$\beta_1=K_1\|P\boldsymbol{b}\|/\sqrt{\lambda_{\min}(P)}$.由式(32)进一步可得

$$\sqrt{V(t)} \leqslant \sqrt{V(0)}e^{-\gamma_1 t} + \frac{\beta_1}{\gamma_1}(1 - e^{-\gamma_1 t}). \tag{33}$$

由于 $V(0)\leqslant\bar{\boldsymbol{b}}_1<\boldsymbol{b}_1$,所以存在 $T_2>0$,使得对于任意 $t\in[0,T_2)$,有 $V(t)<\boldsymbol{b}_1$.

下面进一步研究快变量 ξ 在区间 $[0,T_2)$ 内的变化情况.取 Lyapunov 函数为 $W=\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\bar{P}\boldsymbol{\xi}$,其中 $\bar{P}$ 满足方程 $\bar{P}(B_m-HC)+(B_m-HC)^{\mathrm{T}}\bar{P}=-I$.当 $t\in[0,T_2)$ 时,设

$$\|K\underline{\boldsymbol{e}} - y_r^{(n)} + \boldsymbol{w}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot) + \boldsymbol{w}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}(\cdot)v^s + w\| \leqslant K_2, \tag{34}$$

那么当 $t\in[0,T_2)$,对于任意的 $(\underline{\boldsymbol{e}},\underline{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{w}_f,\boldsymbol{w}_g)\in\boldsymbol{A}$ 及 $W>\varepsilon^2\beta_2$ 时

$$\dot{W} \leqslant -\frac{1}{\varepsilon\lambda_{\max}(\bar{P})}W + \frac{2\|\bar{P}\boldsymbol{b}\|K_2}{\sqrt{\lambda_{\min}(\bar{P})}}\sqrt{W} \leqslant -\frac{\gamma_2}{\varepsilon}W, \tag{35}$$

其中 $\beta_2=16\|\bar{P}\boldsymbol{b}\|^2K_2^2\lambda_{\max}^2(\bar{P})/\lambda_{\min}(\bar{P})$,$\gamma_2=\dfrac{1}{2\lambda_{\max}(\bar{P})}$.所以只要 $(\underline{\boldsymbol{e}},\underline{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{w}_f,\boldsymbol{w}_g)\in\boldsymbol{A}$,就有

$$W(t) \leqslant W(0)e^{-\gamma_3 t/\varepsilon} \leqslant K_3/\varepsilon^{2\gamma-2}e^{-\gamma_3 t/\varepsilon}. \tag{36}$$

设 $T_1(\varepsilon)=\varepsilon/\gamma_2\ln(K_4/\beta_2\varepsilon^{2\gamma_2})$,$\varepsilon\in(0,\varepsilon^*)$,$\varepsilon^*$ 是充分小的正数,所以存在不依赖于 ε 的正数 T_1,对于 $0<\varepsilon<\varepsilon^*$ 时,有 $T_1\leqslant\dfrac{1}{2}T_2$.因此在区间 $[T_1,T_2)$ 内,有 $W\leqslant\varepsilon^2\beta_2$,进而可得 $\|\boldsymbol{\xi}\|\leqslant K\varepsilon$,即 $\boldsymbol{\xi}$ 是关于 ε 的高阶无穷小.

2)证明当 ε 充分小时,$(\underline{\boldsymbol{e}},\underline{\boldsymbol{z}},\boldsymbol{w}_f,\boldsymbol{w}_g)\in\boldsymbol{A}$.设 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}P\underline{\boldsymbol{e}} + \frac{1}{2\eta_1}\tilde{\boldsymbol{w}}_f^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_f + \frac{1}{2\eta_2}\tilde{\boldsymbol{w}}_g^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_g. \tag{37}$$

求 V 对时间的导数,结合式(27)得

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leqslant -\frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}Q\underline{\boldsymbol{e}} + \frac{1}{2}\rho^2 w^2 + K\varepsilon \leqslant -\frac{c_0}{2}\underline{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}P\underline{\boldsymbol{e}} + \frac{1}{2}\rho^2 w^2 + K\varepsilon = \\ &\quad -\frac{c_0}{2}V + \frac{c_0}{2\eta_1}\tilde{\boldsymbol{w}}_f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_f + \frac{c_0}{2\eta_2}\tilde{\boldsymbol{w}}_g^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_g + \frac{1}{2}\rho^2 w^2 + K\varepsilon \leqslant \\ &\quad -\frac{c_0}{2}V + c_0c_1 + c_0c_2 + \frac{1}{2}\rho^2|\bar{w}|^2 + K\varepsilon.\end{aligned} \tag{38}$$

由上式可知,当 $V>c_1+c_2+(\rho^2|\bar{w}|^2+2K\varepsilon)/c_0$ 时,有 $\dot{V}<0$,因此取 ε 足够小,那么集合

$\{V<c_4\}\times\Omega_{\delta_1}\times\Omega_{\delta_2}$为正的不变集. 对于任意时间 t，当 $\underline{e}\in\boldsymbol{E}$，$\underline{z}\in\boldsymbol{Z}$ 时，有$(\underline{e},\underline{z},w_f,w_g)\in\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{Z}\times\Omega_{\delta_1}\times\Omega_{\delta_2}$，因此 $T_2=\infty$，即$(\underline{e},\underline{z},\theta_f,\theta_g)$一直不离开集合 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{Z}\times\Omega_{\delta_1}\times\Omega_{\delta_2}$. 因此，定理2中的结论1成立.

3)证明当 $\varepsilon\to0$时，输出反馈控制可恢复状态反馈性能(3).

由以上证明可知

$$\dot{V}\leqslant-\frac{1}{2}\underline{e}^{\mathrm{T}}Q\underline{e}+\frac{1}{2}\rho^2w^2+K\varepsilon. \tag{39}$$

对式(39)从 $t=0$到 $t=T$ 积分得

$$V(T)-V(0)\leqslant-\frac{1}{2}\int_0^T\underline{e}^{\mathrm{T}}Q\underline{e}\mathrm{d}t\leqslant+\frac{1}{2}\rho^2\int_0^Tw^2\mathrm{d}t+TK\varepsilon. \tag{40}$$

由于 $V(T)\geqslant0$，所以根据式(40)得

$$\frac{1}{2}\int_0^T\underline{e}^{\mathrm{T}}Q\underline{e}\mathrm{d}t\leqslant V(0)+\frac{1}{2}\rho^2\int_0^Tw^2\mathrm{d}t+TK\varepsilon, \tag{41}$$

即当 $\varepsilon\to0$时，输出反馈控制恢复状态反馈性能指标(3)，因此 H^∞跟踪性能达到.

5 结论

本文结合高增益观测器、自适应控制及神经网络逼近方法，提出了一种非线性未知系统的输出反馈自适应控制方法. 由于观测器的引入，有效地削弱了现有神经网络控制方法中要求状态已知的假设，证明了所设计的输出反馈控制器可以恢复状态反馈控制器具有的性能.

参 考 文 献

1 Sanner R M, Slotine J J E. Gaussian networks for direct adaptive control. *IEEE Transaction on neural Networks*, 1992, **13**: 837～863

2 Park J, Sandberg I W. Universal approximation using radial-basis -function networks. *Neural Computation*, 1991, **3**: 246～257

3 Khalil H K. Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1996, **41**: 177～188

4 Chen B S, Lee T S, Feng J H. A nonlinear control design in robotics systems under parameter perturbation and external disturbance. *International Journal of Control*, 1994, **59**: 439～461

佟绍成 见本刊第25卷第3期.

李庆国 1970年生，东北大学自动化研究中心博士研究生. 研究领域为非线性系统的神经网络容错控制方法与技术.

柴天佑 见本刊第23卷第2期.