第16卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 16, No. 6
1990年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1990

线性系统的状态反馈特征结构配置

段广仁 吴广玉 黄文虎

(哈尔滨工业大学)

关键词——特征结构配置，线性系统，状态反馈.

一、引 言

关于线性系统状态反馈特征结构配置问题的研究，现已有一些结果[1-4]，但这些结果或者要求了闭环极点互异[1-2]，闭环极点异于开环极点[1-3]等条件，或者在开、闭环公有极点存在的情况下，要求验证一系列的附加条件约束[4]. 本文给出了线性系统状态反馈特征结构配置的一种新方法，克服了文[1—4]的缺点.

二、问题的描述

给定矩阵 $A\in R^{n\times n}$, $B\in R^{n\times r}$; 数集 $\Gamma=\{s_i, s_i\in C, i=1, 2, \cdots, m, 1\leqslant m\leqslant n\}$ 及正整数 p_{ij}, m_i, q_i, $j=1, 2,\cdots, q_i$, $i=1, 2, \cdots, m$; 其中 B 阵满秩，数集 Γ 关于实轴对称，m_i, q_i, p_{ij} 满足关系 $\sum\limits_{i=1}^{m} m_i=n$, $\sum\limits_{j=1}^{q_i} p_{ij}=m_i$. 则所谓的线性系统状态反馈特征结构配置问题即是求取矩阵 $K\in R^{r\times n}$ 及线性无关的一组向量 $n_{ij}^k\in C^n, k=0,1, 2, \cdots, p_{ij}-1; j=1, 2, \cdots, q_i; i=1, 2, \cdots, m$ 使得下式成立:

$$\begin{aligned}&(A+BK-s_iI)n_{ij}^k=n_{ij}^{k-1},\ n_{ij}^0=0,\\ &\quad(k=0, 1, 2, \cdots p_{ij}-1;\\ &\qquad j=1, 2, \cdots, q_i;\ i=1, 2, \cdots, m)\end{aligned} \tag{1}$$

(1)式说明，s_i 为 $A_c=A+BK$ 的特征值，其代数重数与几何重数分别为 m_i 和 q_i，且 s_i 在 A_c 阵的若当形中所对应的 q_i 个若当块阶数分别为 $p_{ij}, j=1,2,\cdots,q_i; i=1, 2, \cdots, m$; 而 n_{ij}^k, $k=0, 1, \cdots, p_{ij}-1; j=1, 2,\cdots, q_i$ 为 A_c 阵的对应于特征值 s_i 的 q_i 个广义特征向量链.

三、主要结果

设 $P(s)\in C^{m\times n}$ 为关于 s 的矩阵函数，$F=\{f^i, f^i\in C^n, i=0, 1, \cdots, l\}$，定义算子

本文于1988年9月23日收到.

D^k 如下：

$$D^k\{P(s),\ F\} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}P(s)f^0 + \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}P(s)f^1 + \cdots + P(s)f^k,$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l). \tag{2}$$

引理 1[3]. 设 $H(s) \in R^{n\times n}$ 为关于 s 的矩阵函数。则对于 $s = s_0$，下式

$$\frac{d^k}{ds^k}\det H(s_0) = 0,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{3}$$

成立的充要条件是

$$D^k\{H(s_0),\ F\} = 0,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m. \tag{4}$$

其中 $F = \{f^i,\ f^i \in C^n,\ i = 0,\ 1,\ \cdots,\ m,\ f^0 \neq 0\}$ 可任意选取.

引理 2[5]. 设 $[A\ \ B]$ 能控，则下式成立：

$$\det[sI - A - BK] = \det[T(s) - KN(s)], \tag{5}$$

其中 $T(s) \in R^{r\times r}$ 与 $N(s) \in R^{n\times r}$ 为互右素的多项式矩阵，且满足

$$(sI - A)^{-1}B = N(s)T^{-1}(s). \tag{6}$$

引理 2 中矩阵 $N(s)$, $T(s)$ 的求取可见文[5].

定义矩阵 N 如下：

$$N = [N_1(s_1)\ \ \cdots\ \ N_m(s_m)],\ N_i(s_i) = [N_{i1}(s_i)\ \ \cdots\ \ N_{iq_i}(s_i)], \tag{7),(8}$$

$$N_{ij}(s_i) = [n_{ij}^0(s_i)\ \ \cdots\ \ n_{ij}^{p_{ij}-1}(s_i)],\ n_{ij}^k(s_i) = D^k\{N(s_i),\ F_{ij}\}, \tag{9),(10}$$

$$F_{ij} = \{f_{ij}^k,\ f_{ij}^k \in C^r,\ f_{ij}^0 \neq 0,\ k = 0,\ 1,\ \cdots\ p_{ij} - 1\},$$

其中 F_{ij} 的选取使得下述条件成立：

条件 A. 当 $s_i = \bar{s}_l$ 时，有 $f_{ij}^k = [\bar{f}_{lj}^k]$.

条件 B. $\det N \neq 0$.

再完全类似地定义矩阵 T（只须将(7)—(10)式中出现的 N 和 n 分别换为 T 和 t），并令

$$K = TN^{-1}. \tag{11}$$

则从引理 2 出发，应用引理 1，仿文[3]中的证明并注意到算子 D^k 的线性性质可得本文的下述主要结果（证明从略）：

定理. 设 $[A\ \ B]$ 能控，则前述线性系统状态反馈特征结构配置问题有解的充要条件是存在向量集系 $\{F_{ij}\}$，使得条件 A, B 满足；且此时问题的解由(7)—(10)式给出.

四、两 点 说 明

(1) 定理给出了状态反馈阵和闭环广义特征向量链的关于闭环特征值和一组 r 维自由参向量的参量表示. 在条件 A, B 下任意改变该组参向量，可得到不同的控制器结构和不同的动态特性. 该结果克服了文[1—4]中的缺点，且由于避免了 $(sI - A)$ 的逆矩阵[3]和伴随阵[4]及其导数的求取，在计算上也具有明显的优越性.

(2) 由定理及单输入系统极点配置问题的唯一性，通过特别选取定理中的自由参向量可推得结论：单输入线性系统通过状态反馈可以实现的闭环特征结构只有各特征值的

几何重数为 1 的情况.

参 考 文 献

[1] Klein, G. and Moore, B. C., Eigenvalue-generalized Eigenvector Assignment with State Feedback, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-22(1977), 140—141.

[2] Porter, B. and D'Azzo, J. J., Closed-loop Eigenstructure Assignment by State Feedback in Multivariable Linear Systems, *Int. J. Contr.*, 27(1978), 487—492.

[3] Fahmy, M. M. and O'Reilly, J., Eigenstructure Assignment in Linear Multivariable Systems. A Parametric Solution, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-28(1983), No.10.

[4] Fahmy, M. M. and Tantawy, H. S., Eigenstructure Assignment via State Feedback Control, *Int. J. Contr.*, 40(1984), No.1.

[5] 张福恩,状态反馈极点配置的直接方法,自动化学报, 12(1986), No.2.

EIGENSTRUCTURE ASSIGNMENT FOR LINEAR SYSTEMS VIA STATE FEEDBACK

DUAN GUANGREN WU GUANGYU HUANG WENHU

(*Harbin Institute of Technology*)

Key words ——Eigenstructure assignment; linear system; state feedback.