极点配置显式自校正前馈控制器

邓 自 立
（黑龙江大学应用数学研究所）

关键词——自校正多步递推预报器，显式自校正前馈控制器，极点配置.

一、极点配置前馈控制器

假设系统用 CARMAX 模型描写为

$$Ay(t)=q^{-k}Bu(t)+q^{-d}Dv(t)+Ce(t), \tag{1}$$

其中 A, B, C, D 是滞后算子 q^{-1} 的多项式；k, d 为时滞，$k\leqslant d$；$y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ 分别为系统输出、控制和干扰；$e(t)$ 是零均值、方差为 σ^2 的白噪声.

考虑广义二次性能指标为

$$J=E[(Py(t+k)+Qu(t)+Sv(t+k-d)-Rw(t))^2], \tag{2}$$

这里 $w(t)$ 是设定值；P, Q, S, R 是 q^{-1} 的多项式.

易知极小化(2)的最优控制 $u(t)$ 满足方程[2]

$$P(\tilde{q}^{-1})\hat{y}(t+k|t)+Qu(t)+Sv(t+k-d)-Rw(t)=0, \tag{3}$$

其中 $P(\tilde{q}^{-1})$ 是只对 k 步预报器 $\hat{y}(t+k|t)$ 的第一个时标运算的 $P(q^{-1})$，即

$$\begin{aligned}P(\tilde{q}^{-1})\hat{y}(t+k|t)=&p_0\hat{y}(t+k|t)+p_1\hat{y}(t+k-1|t)\\&+\cdots+p_{n_p}\hat{y}(t+k-n_p|t).\end{aligned} \tag{4}$$

引入分解 $PC=AF+q^{-k}G$, F 的阶为 $(k-1)$，仿文[2]，易导出在控制律(3)下的闭环方程

$$(BP+QA)y(t)=BRw(t-k)+(DQ-BS)v(t-d)+(BF+QC)e(t). \tag{5}$$

设 T 是已知的极点配置多项式，f 是已知常数，为实现极点配置可选择 P, Q 使

$$BP+QA=fT. \tag{6}$$

由公式(5)，(6)知，为了消除稳态偏差和抗干扰，可简单地选择 R, S 为如下常数：

$$R=fT(1)/B(1),\quad S=D(1)Q(1)/B(1). \tag{7}$$

二、极点配置显式自校正前馈控制器

由(3)，(4)式看到求控制 $u(t)$ 归结为求多步预报器 $\hat{y}(t+k-i|t)$, $i=0,1,\cdots,$

本文于1988年7月8日收到.

$k-1$，这恰好可用自校正多步递推预报器[1]计算．因此极点配置显式自校正前馈控制器由以下四步组成：

(i) 用递推增广最小二乘法[1]在线辨识原始模型(1)，得估值 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{D}$, $\hat{C}$, $\hat{e}(t)$；

(ii) 计算显式自校正多步递推预报器[1]：

$$A(\tilde{q}^{-1})\hat{y}(t+i|t)=\hat{B}u(t+i-k)+\hat{D}v(t+i-d)+\hat{C}_i\hat{e}(t+i), \tag{8}$$

其中 $i=1,\cdots,k$, $\hat{A}(\tilde{q}^{-1})$ 的含义同 $P(\tilde{q}^{-1})$，规定当 $j\leqslant t$, $\hat{y}(j|t)=y(j)$，$\hat{C}_i$ 是 $\hat{C}$ 的截首多项式，即

$$\hat{C}_i(q^{-1})=\hat{c}_iq^{-i}+\cdots+\hat{c}_{n_c}q^{-n_c}, \ (\text{当 } i>n_c, \ \hat{C}_i=0); \tag{9}$$

(iii) 把 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 代入(6)式求解 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$，并将 $\hat{B}$, $\hat{D}$, $\hat{Q}$ 代入(7)式计算估值 $\hat{R}$ 和 $\hat{S}$；

(iv) 由(4)式，显式自校正控制律为

$$\hat{P}(\tilde{q}^{-1})\hat{y}(t+k|t)+\hat{Q}u(t)+\hat{S}v(t+k-d)-\hat{R}w(t)=0. \tag{10}$$

在每时刻 t 重复进行上述四步，上述显式自校正算法完全不同于文[2]的隐式算法．

三、仿 真 例 子

考虑非最小相位和开环不稳定系统[2]

$$(1-q^{-1})y(t)=q^{-2}(1+1.5q^{-1})u(t)+(1-0.2q^{-1})e(t), \tag{11}$$

其中 $e(t)$ 是正态 $N(0, 0.1)$ 白噪声．

选择极点配置多项式 T 和常数 f 为

$$T=1-0.5q^{-1}, \ f=5. \tag{12}$$

置 $z(t)=(1-q^{-1})y(t)-u(t-2)$，则(11)式化为

$$z(t)=b_0u(t-3)+c_1e(t-1)+e(t), \ b_0=1.5, \ c_1=-0.2, \tag{13}$$

利用递推增广最小二乘法由(13)式可得在时刻 t 的估值 $\hat{b}_0$, $\hat{c}_1$, $\hat{e}(t)$，并由(6)式和(7)式有估值

$$\hat{p}_0=2.5/(1+\hat{b}_0), \ \hat{q}_0=5-\hat{p}_0, \ \hat{R}=\hat{p}_0. \tag{14}$$

由(10)式显式自校正极点配置前馈控制器为

$$\hat{p}_0\hat{y}(t+2|t)+\hat{q}_0u(t)-\hat{p}_0w(t)=0, \tag{15}$$

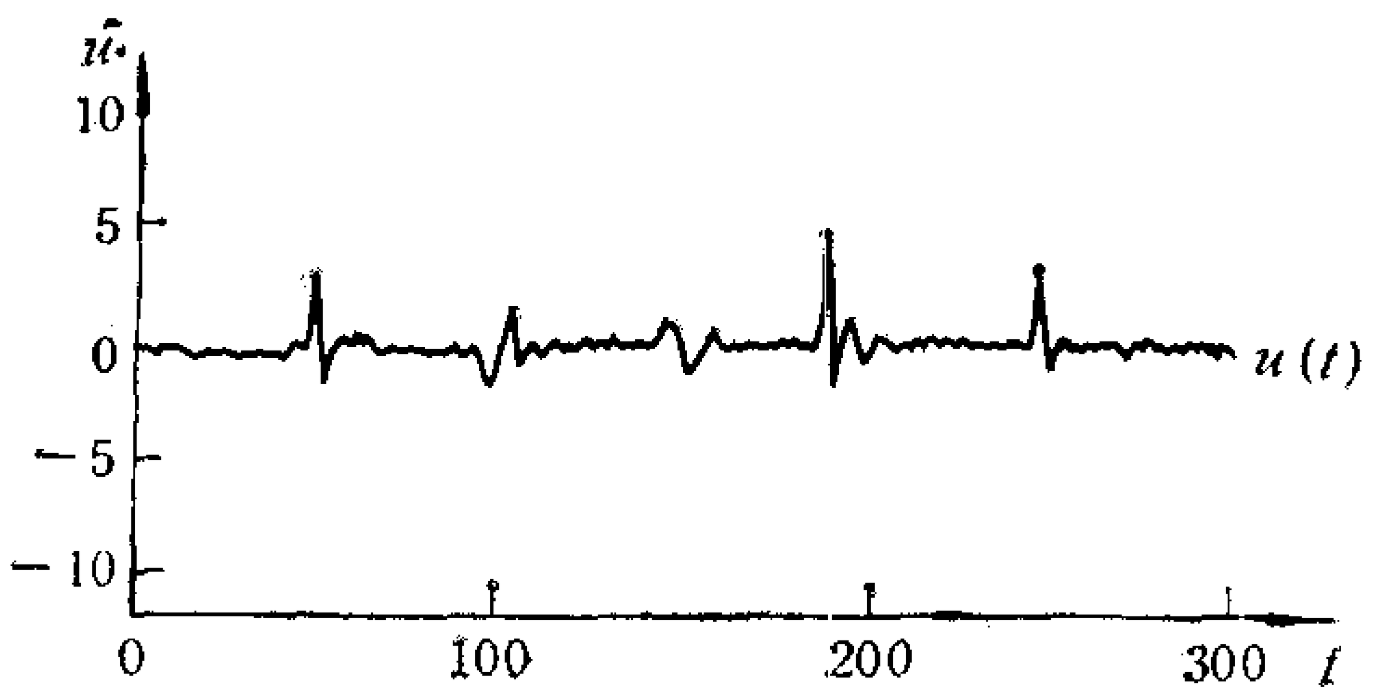

图 1 显式自校正控制信号 $u(t)$

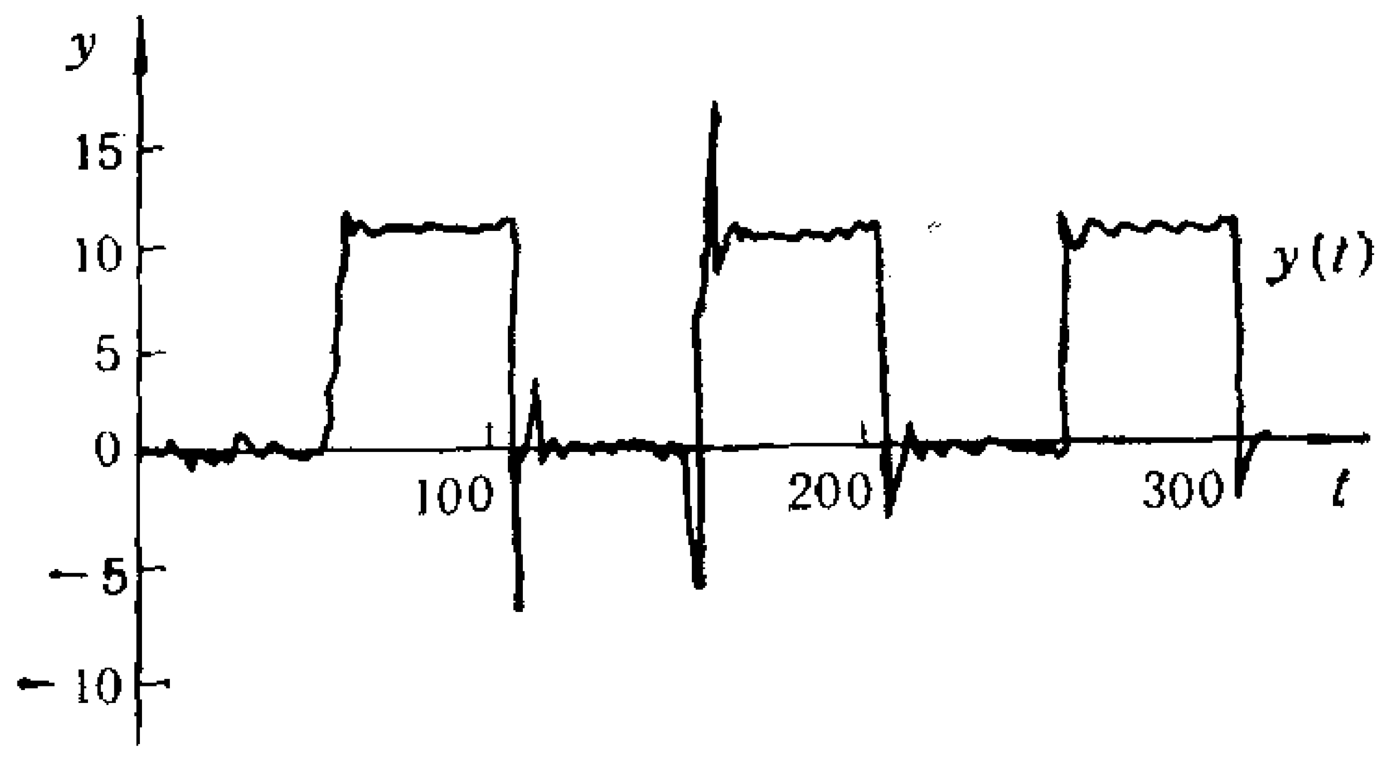

图 2 闭环系统的输出信号 $y(t)$

其中 $\hat{y}(t+2|t)$ 可由(11)式和(8)式以递推方式求出：

$$\hat{y}(t+1|t)=y(t)+u(t-1)+\hat{b}_0u(t-2)+\hat{c}_1\hat{e}(t), \tag{16}$$

$$\hat{y}(t+2|t) = \hat{y}(t+1|t) + u(t) + \hat{b}_0 u(t-1). \tag{17}$$

由(15)—(17)式自校正控制 $u(t)$ 还可表示为

$$u(t) = 0.2\hat{p}_0[w(t) - \hat{y}(t+1|t) - \hat{b}_0 u(t-1)]. \tag{18}$$

假定设定值序列 $w(t)$ 是幅度为 10、宽度为 $t=50$ 的方波，仿真结果如图 1 和图 2 所示。图 2 表明输出 $y(t)$ 跟踪 $w(t)$ 的变化且无稳态偏差。

致谢　郭一新同志为本文计算了仿真例子，在此表示感谢。

参　考　文　献

[1] 邓自立、赵永胜等，多变量多步自校正递推预报器及其应用，自动化学报，**9**(1983)，241—247.

[2] Allidina, A. Y., Hughes, F. M., Generalised Self-tuning Controller with Pole Assignment, IEE Proc. **127** (1980), D, 13—18.

AN EXPLICIT SELF-TUNING FEEDFORWARD CONTROLLER FOR POLE PLACEMENT

Deng Zili

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University)

Key words——Self-tuning multistep recursive predictor; explicit self-tuning feedforward controller; pole placement.