

基于最优生成树结构的过程瓶颈分析

江永亨 金以慧

清华大学自动化系 100084

摘要 本文针对文献^[1]在最小费用网络过程瓶颈分析方面存在的缺陷,提出了基于最优生成树结构的瓶颈定义和分类,并重新定义了瓶颈裕度和瓶颈迁移.

关键词 最小费用网络、生成树、过程瓶颈、瓶颈裕度、瓶颈迁移

1 引言

文献^[1]研究了最小费用瓶颈分析,其分析存在着瓶颈集不完全、瓶颈行为特征不明确及相互组合重叠等问题.本文针对这些问题提出了瓶颈结构的概念,并在此基础上进行过程瓶颈分析,包括其定义、分类及瓶颈裕度、瓶颈迁移的研究.

2 最小费用过程瓶颈分类分析

文献^[2]给出了有关最小费用网络的一系列定义和概念和性质.下面先介绍最小费用网络问题的描述,再进行瓶颈分析.

最小费用网络问题^[2]: 对于有向网络 $G=(N, A)$

$$\text{目标函数} \quad \text{Min } z(x) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (1a)$$

$$\text{s. t} \quad \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji} = b(i), \quad i \in N \quad (1b)$$

$$u_{ij}^- \leq x_{ij} \leq u_{ij}^+, \quad (i, j) \in A \quad (1c)$$

$$\sum_{\{i \in N\}} b(i) = 0 \quad (1d)$$

其中 $z(x) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$ 为费用函数, 设 z_f 为最优目标值.

文献^[1]关于瓶颈的定义和分类的基本思想是如果紧化某些弧的容量约束导致网络的总费用上升, 则这些卡边弧称为瓶颈弧; 根据改进费用目标需要放松容量约束的瓶颈

弧的个数将瓶颈分为第二类和第三类, 所有瓶颈弧构成第一类瓶颈集. 下面提出有关基于最优生成树的瓶颈分析定义.

定义 2.1: 给定某最小费用网络的最优生成树结构 $(T, L, U)^{[2]}$, (T', L', U') 称为相应的瓶颈结构, 其中 $T' = T \cup \{(i, j) \mid (i, j) \in L \text{ 或 } (i, j) \in U, c_{ij}^\pi = 0\}$, $L' = L \setminus \{(i, j) \mid (i, j) \in L, c_{ij}^\pi = 0\}$, $U' = U \setminus \{(i, j) \mid (i, j) \in U, c_{ij}^\pi = 0\}$. 对于最小费用网络, 最优生成树结构不唯一, 所以瓶颈结构不唯一.

定义 2.2: 给定某最小费用网络, 对于第 i 个最小费用网络的瓶颈结构 (T', L', U') , $R_{3i} = \{(i, j) \mid (i, j) \in L', r_{ij} > 0 \text{ 或 } (i, j) \in U', r_{ij} > 0\}$, $R_3 = \bigcup_i R_{3i}$, 称 R_3 的元素为第三类瓶颈, 称 R_3 为其瓶颈集. 其中 r_{ij} 表示图 T' (以 T' 中的弧为弧, 相应的邻接顶点为顶点的图, 下同) 中从点 i 到点 j 的最大增广容量, $r_{ij} = 0$ 意味着从 i 到 j 不可增广.

定义 2.3: 给定某最小费用网络, 对于第 i 个最小费用网络的瓶颈结构 (T', L', U') , 设 $R_3^h(i, j)$ 和 $R_4^k(i, j)$ 分别表示图 T' 以 i 为源点、 j 为汇点的最大流瓶颈中的第 h 个第三类瓶颈和第 k 个第四类瓶颈. 当 $(i, j) \in L'$ 且 $r_{ij} = 0$ 时, 对任意 h (或 k) 有序号 l , 令 $R_2^l = \{(i, j)\} \cup R_3^h(i, j)$ (或 $R_2^l = \{(i, j)\} \cup \{R_4^k(i, j)\}$); 当 $(i, j) \in U'$ 且 $r_{ij} = 0$ 时, 对任意 h (或 k) 有序号 l , 令 $R_2^l = \{(i, j)\} \cup R_3^h(j, i)$ (或 $R_2^l = \{(i, j)\} \cup \{R_4^k(j, i)\}$). $R_{2i} = \{R_2^l\}$, $R_2 = \bigcup_i R_{2i}$, 称 R_2 的元素为第二类瓶颈, R_2 为其瓶颈集. 定义 2.4: 给定最小费用网络, $R_1 = \{(i, j) \mid (i, j) \in R_3 \text{ 或 } (i, j) \in R_2^l \in R_2\}$, 称 R_1 的元素为第一类瓶颈, 称 R_1 为第一类瓶颈集.

由以上定义而得的过程瓶颈具有如下性质:

性质 2.1: $\forall R_1^l \in R_1$, 在不影响可行性的情况下, 紧化 R_1^l 的容量约束, 目标费用 z_f 变大.

证明:

由定义可知: $\forall R_1^l \in R_1$, 有 $R_1^l \in R_3$ 或 $R_1^l \in R_2^k \in R_2$;

若 $(i, j) \in T'$, 则 $c_{ij}^\pi = 0$; 否则, $c_{ij}^\pi \neq 0$;

若 $R_1^l \in R_3$, 则 $R_1^l \notin T'$, R_1^l 与 T' 中部分弧构成圈 w_1 ;

若 $R_1^l \in R_2^k \in R_2$, 则 R_2^k 中的弧与 T' 中部分弧构成圈 w_2 , 且 $\exists (i, j) \in w_2$, 使得 $c_{ij}^\pi \neq 0$, $\forall (p, q) \in w_2 \setminus (i, j)$ 有 $c_{pq}^\pi = 0$;

所以 w_1 、 w_2 均为非零费用圈, 紧化 R_1^l 的容量约束必然使得最小费用网络沿正费用方向进行流扩充, 从而目标费用 $\text{minimize } z(x) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$ 变大.

性质 2.2: $\forall R'_2 \in R_2$, 放松 R'_2 的容量约束, 目标费用 z_f 变小.

性质 2.3: $\forall R'_3 \in R_3$, 放松 R'_3 的容量约束, 目标费用 z_f 变小.

性质 2.2 与 3.3 的证明与性质 1 的证明类似, 从略.

性质 2.4: 基于最优生成树结构的瓶颈定义减少了瓶颈的组合重叠现象.

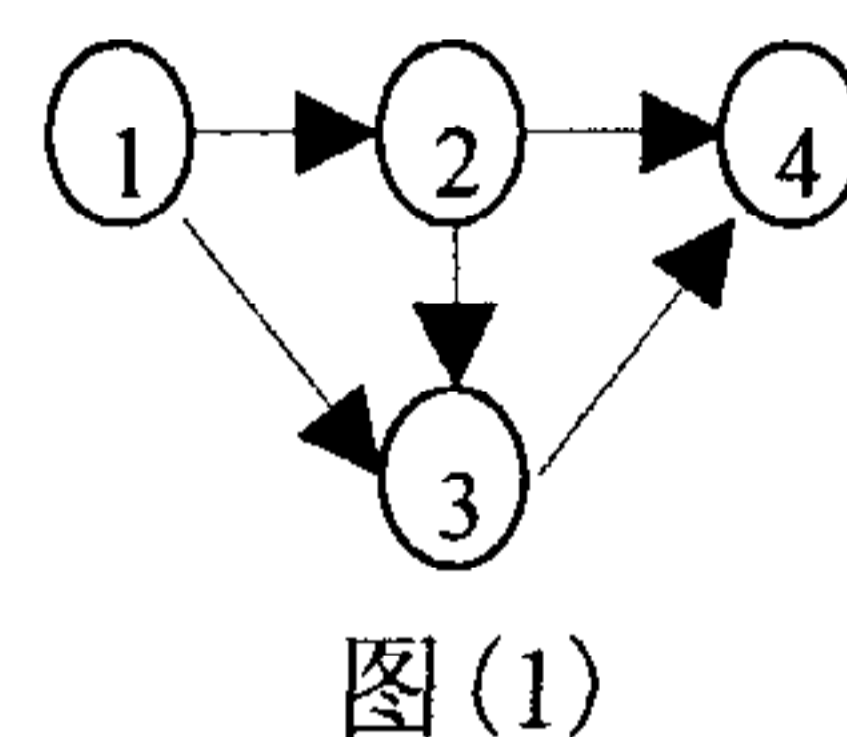
证明:

已知根据基于负费用圈的瓶颈定义得到了瓶颈 R'_2 和 $R^{(i)}$, 其中 $R^{(i)} \in R_2 \cup R_3$, 使得 $R'_2 = \bigcup_i R^{(i)}$. 在图 (1) 中, $i=1, 2$, $R^{(1)}=(1, 2)$, $R^{(2)}=(2, 4)$, $R'_2=\{(1, 2), (2, 4)\}$. 图中 $(1, 3)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 4)$ 既不卡上界也不卡下界, $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 、 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ 和 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 分别为负费用圈.

由基于最优生成树的瓶颈结构的定义知: $(1, 3)$ 、 $(2, 3)$ 、 $(3, 4)$ 必然存在于瓶颈结构的 T' 中. 因为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 、 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ 和 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 分别为负费用圈, 所以 $c_{12}^\pi < 0$, $c_{24}^\pi < 0$, 因而 $(1, 2)$ 、 $(2, 4)$ 必然不在 T' 中.

考虑基于最优生成树结构的瓶颈定义, 容易得到 $R^{(1)}=(1, 2)$, $R^{(2)}=(2, 4)$, 并且 $R^{(i)} \in R_2 \cup R_3$, 但 $\{(1, 2), (2, 4)\}$ 不能作为瓶颈而得到.

综上所述, 在基于负费用圈的瓶颈定义下由 $R^{(1)}$ 和 $R^{(2)}$ 组合而成的 R'_2 是作为瓶颈存在的, 这叠现象, 上述情形在基于最优生成树的瓶颈定义在.



瓶颈
就是组合重
下不复存

图(1)

结论得证.

求解最小费用网络三类费用瓶颈的算法可以由定义得到, 由于篇幅有限, 这里从略.

3 瓶颈裕度与瓶颈迁移分析

瓶颈裕度与瓶颈迁移是紧密关联不可分割的两个概念. 通过改变瓶颈的容量约束可以改进网络的费用目标, 但当容量约束改进达到一定幅度后费用目标不再改变, 瓶颈集合发生变化, 这种现象就称为瓶颈迁移, 容量约束改进的最大有效幅度就是瓶颈裕度. 但是依据瓶颈集合或依据费用目标来定义瓶颈迁移和瓶颈裕度的结果并不是一致的. 与基于负费用圈的瓶颈定义相对应的瓶颈裕度和瓶颈迁移的定义只能是基于费用目标的, 但这种情况使得瓶颈迁移的定义不确切. 本文将依据瓶颈集合来进行瓶颈裕度与瓶颈迁移的定义. 定义如下:

定义 3.1: 给定瓶颈 $R'_2 \in R_2$ 或 $R'_3 \in R_3$ 及相应的瓶颈结构 (T', L', U') , 对于

δ , $\forall \varepsilon \in (0, \delta)$, 如果瓶颈 R_2^l 或 R_3^k 的相关容量改进 ε 而瓶颈结构 (T' 、 L' 、 U') 不发生变化, 则称 $\delta_{\max} = \max \delta$ 为相应瓶颈的瓶颈裕度. 当瓶颈 R_2^l 或 R_3^k 的相关容量改进 δ_{\max} 时, 产生瓶颈迁移.

由以上定义, 易知:

性质 3.1: 给定第二类瓶颈 R_2^l , 其瓶颈裕度等于相应的最大流瓶颈裕度:

$$\delta_{\max} = \delta_{\max} (R_3^h(i, j)), \text{ 若 } R_2^l = \{(i, j)\} \cup R_3^h(i, j);$$

$$\delta_{\max} = \delta_{\max} (R_4^k(i, j)), \text{ 若 } R_2^l = \{(i, j)\} \cup \{R_4^k(i, j)\};$$

$$\delta_{\max} = \delta_{\max} (R_3^h(j, i)), \text{ 若 } R_2^l = \{(i, j)\} \cup R_3^h(j, i);$$

$$\delta_{\max} = \delta_{\max} (R_4^k(j, i)), \text{ 若 } R_2^l = \{(i, j)\} \cup R_4^k(j, i);$$

性质 3.2: 给定第三类瓶颈 R_3^k , 其瓶颈裕度等于相应的最大增广容量:

$$\delta_{\max} = r_{ij}, \text{ 若 } R_3^k \in L';$$

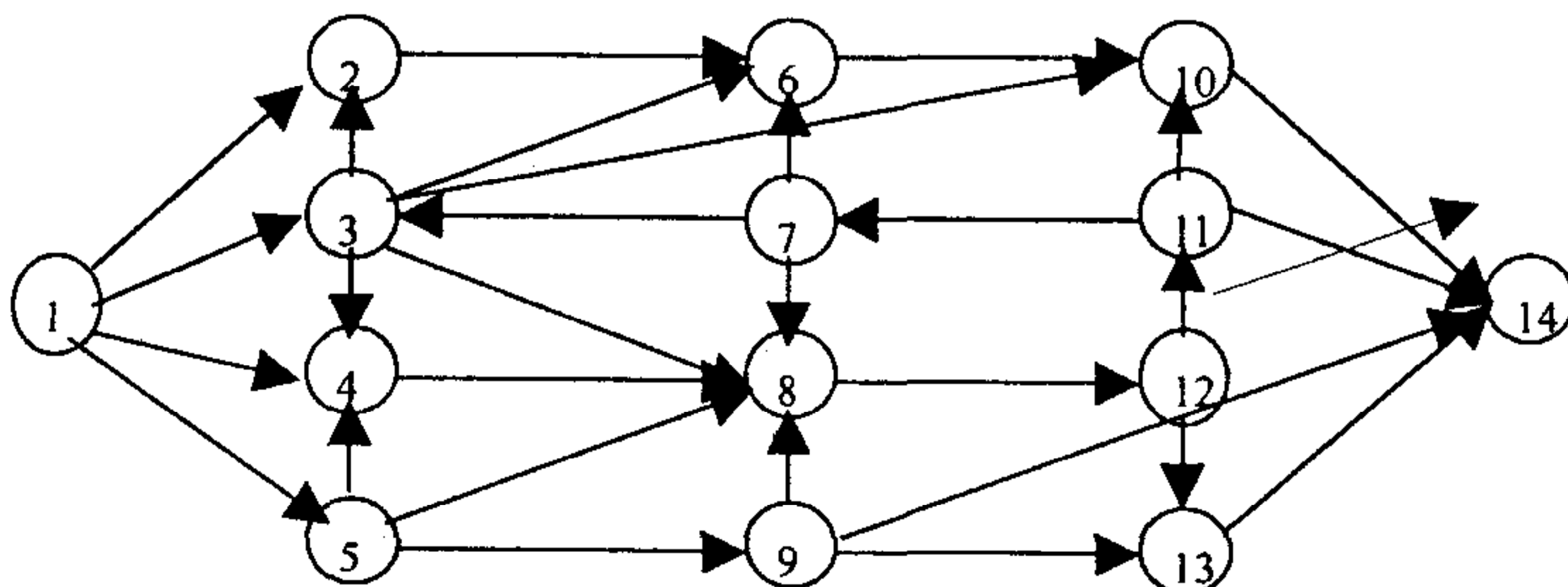
$$\delta_{\max} = r_{ji}, \text{ 若 } R_3^k \in U';$$

以上定义和性质实际上已经给出了瓶颈裕度的求解算法. 在改进费用目标时, 要选择所需费用效益比最小的瓶颈作为改进对象. 按照本文关于瓶颈裕度的定义, 当所选瓶颈的容量改进达到瓶颈裕度时, 瓶颈集合发生变化, 而原选瓶颈仍有可能存在于集合中, 但此时对其改进所需费用效益比却无法保证最小了, 因而继续改进该组瓶颈是不明智的. 所以, 每当改进瓶颈的容量达到其裕度时, 要继续改进费用目标都需要重新选择改进对象, 这为网络的最小费用改进提供了理论工具, 也是瓶颈行为特征更加清晰合理的表现之一.

4 一个算例

下面以一个典型例子来说明本文所给算法与文献[1]的算法求解结果的不同.

网络结构



过程瓶颈比较 (总流量=18)

	基于最优生成树的算法				基于负费用圈的算法			
第一类	(1,2)	(2,6)	(3,2)	(3,6)	(2,6)	(3,6)	(3,10)	(10,14)
	(3,10)	(8,12)	(10,14)					
第二类	{(1,2),(2,6)}		{(3,10),(10,14)}		{(3,10),(10,14)}		{(2,6),(3,10),(10,14)}	
	{(2,6),(3,2)}		{(3,6),(10,14)}		{(2,6),(10,14)}		{(3,6),(10,14)}	
第三类	(3,6)	(8,12)			(2,6)	(3,6)		

注: 因为本例中流量下界均为零, 故包含卡下界瓶颈弧的瓶颈略去.

由上表容易看出基于负费用圈算法的缺陷: 计算结果不完全并且出现了假瓶颈 (即改进其容量约束并不能优化费用目标), 瓶颈之间存在组合覆盖, 其中 (2,6) 和 {(2,6),(10,14)} 是假瓶颈, {(2,6),(3,10),(10,14)} 是 (2,6) 和 {(3,10),(10,14)} 的组合. 而由基于最优生成树的定义得到的瓶颈是完全的, 且不存在假瓶颈 (注意 (2,6) 在第三类中是假瓶颈, 因为单独改进它不能使费用目标更优, 但 (2,6) 却是真正的第一类瓶颈, 因为它是第二类瓶颈 {(1,2),(2,6)} 和 {(2,6),(3,2)} 的一部分, 同时紧化其容量约束可以劣化费用目标), 在例子中也明显少了组合重叠现象.

5 总结

本文基于最优生成树结构给出了三类最小费用过程瓶颈的定义和性质、瓶颈裕度和瓶颈迁移的定义和性质, 以及相应的求解算法. 基于最优生成树结构最小费用过程瓶颈分析克服了文献^[1]中有关定义的一些缺陷, 使得定义和分类更加科学合理, 剔除了假瓶颈, 减少了组合覆盖现象, 瓶颈更加完全.

参 考 文 献

- 1 王军, 流程工业的过程瓶颈分析及生产调度问题的研究, 清华大学博士论文, 1998
- 2 Ravindra K Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin. Network flows theory, algorithms, and applications. Englewood Cliffs, N.J. · Prentice Hall, c1993

江永亨 1974 年生, 1998 年毕业于清华大学自动化系, 现攻读控制理论与控制工程博士学位, 主要研究方向为生产系统分析.

金以慧 1936 年生. 1959 年毕业于清华大学, 1963 年清华大学研究生毕业, 现为清华大学自动化系教授. 主要研究方向为高等过程控制、系统的建模与优化、计算机集成过程系统.