第26卷 第3期
2000年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 3
May, 2000

短文

结构不确定性系统的敏感性分析[1)]

高志伟 王先来 王德贤
（天津大学自动化与能源工程学院 天津 300072）

摘 要 讨论了控制对象和控制器同时存在稳定反馈结构不确定性的鲁棒稳定性和性能敏感性问题，给出了摄动系统鲁棒稳定的充分条件，得到了敏感函数矩阵和闭环传递函数矩阵 H_∞ 的摄动上界. 这里控制器并不要求是真稳定的，因此得到的结果较有一般性.

关键词 结构不确定性，稳定反馈摄动，敏感函数矩阵，H_∞摄动界.

SENSITIVITY ANALYSIS OF SYSTEMS UNDER STABLE FEEDBACK STRUCTURED UNCERTAINTY

GAO Zhiwei WANG Xianlai WANG Dexian
(*School of Electrical Automation and Energy Engineering, Tianjin University, Tianjing* 300072)

Abstract In this paper, the problem of the stability robustness and the performance sensitivity is investigated for systems under stable feedback structured uncertainties both on the plant G and the feedback controller K simultaneously. Sufficient conditions for the robust stability and the upper bounds for the sensitivity function matrix and the closed-loop transfer function matrix are given in terms of H^∞-norms. The controller K does not need to be proper and stable, therefore the results obtained here is of general sense.

Key words Structured uncertainty, stable feedback uncertainty, sensitivity function matrix, perturbed bounds.

1 引言

众所周知，结构不确定性或摄动在实际系统中是广泛存在的. 因此，系统的鲁棒控制研究20多年来一直受到普遍的关注[1,2]. 不难看出，即使在某种结构不确定性或摄动的干扰下，系统能够鲁棒稳定，但是系统的性能指标却在摄动下发生了变化，以至于不一定能

1) 国家自然科学基金(No. 69874027)资助项目.
收稿日期 1997-11-21 收修改稿日期 1998-12-03

够满足原来的性能要求.因而，系统的性能对于结构不确定性或摄动的敏感程度如何，显然是一个有意义的研究问题.文[3]分别分析了控制对象存在加摄动、输入乘摄动、输出乘摄动以及控制器存在加摄动的不确定性系统的性能敏感性问题.文[4,5]则把文[3]中提出的四种结构不确定性放在一起同时考虑，扩展了文[3]的结果.稳定反馈摄动是在实际系统中广泛存在的另一种典型的结构不确定性，文[6]讨论了这种摄动结构.然而，文[6]假定控制器是真稳定的，这样得到的结果难免有些局限性.为了使得到的结果较有一般性，本文将取消对控制器的限制，即这里假定控制对象和控制器同时存在稳定反馈结构不确定性，而且控制对象和控制器都可以是非真稳定的有理矩阵.

2　预备知识

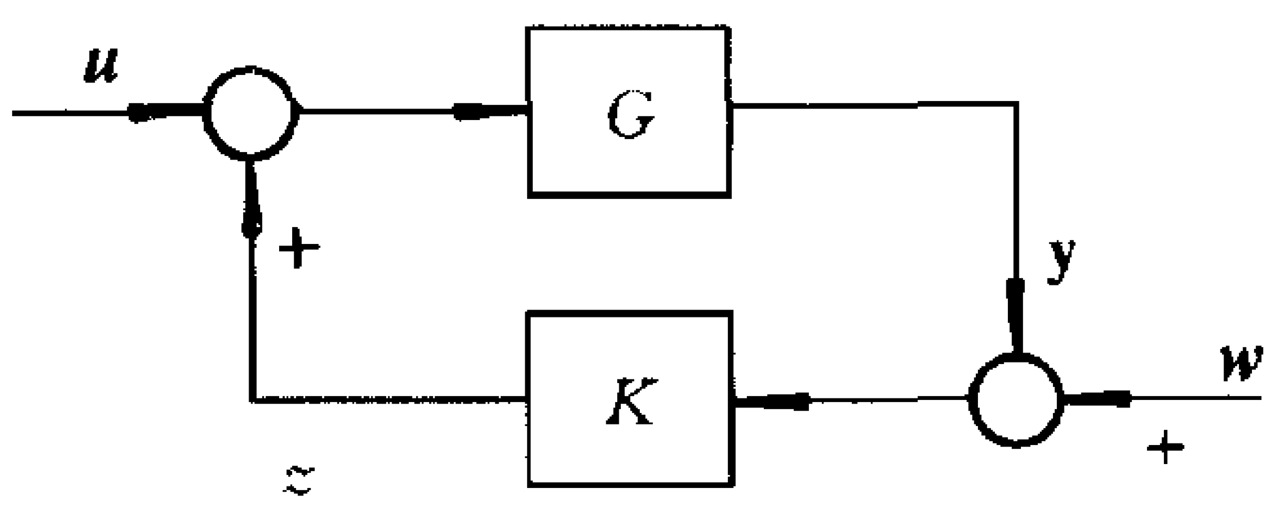

图 1　名义系统 $\Sigma(G,K)$

考虑图1所示的名义系统和图2所示的稳定反馈结构不确定性，图中 G 和 K 分别表示控制对象和控制器的传递函数矩阵.反馈摄动 Δ_{gf} 和 Δ_{kf} 均为真稳定的.记 RH_∞ 为真稳定有理函数矩阵的集合，则 $\Delta_{gf},\Delta_{kf}\in RH_\infty$.

令 $(\tilde{M},\tilde{N})$ 是控制对象 $G=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ 在 RH_∞ 上的左互质分式表达；(U,V) 是反馈控制器 $K=UV^{-1}$ 的右互质分式表达[1~3].那么，名义系统 $\Sigma(G,K)$ 的传递函数矩阵为

$$H(G,K)=\begin{pmatrix}V\\U\end{pmatrix}(\tilde{M}V-\tilde{N}U)^{-1}(\tilde{N}\quad\tilde{M})+\begin{bmatrix}0&-I\\0&0\end{bmatrix},\tag{1}$$

其中 I 为单位矩阵，$H(G,K):\begin{pmatrix}u\\w\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}$.

(a)稳定反馈不确定性(on G)　　(b)稳定反馈不确定性(on K)

图2　结构不确定性

名义系统 $\Sigma(G,K)$ 的敏感函数矩阵定义为

$$S=(I-GK)^{-1}=V(\tilde{M}V-\tilde{N}U)^{-1}\tilde{M}.\tag{2}$$

显然，$H(G,K)\in RH_\infty$ 的充要条件就是 $(\tilde{M}V-\tilde{N}U)^{-1}\in RH_\infty$.为了后面讨论有意义及叙述方便，给出如下重要假设.

假设1.

$$\tilde{M}V-\tilde{N}U=I,\quad \|S\|_\infty\leqslant\eta,\quad \|H(G,K)\|_\infty\leqslant\gamma.\qquad(3),(4),(5)$$

式(3)保证了名义系统 $\Sigma(G,K)$ 是真稳的，即 $H(G,K)\in RH_\infty$；同时式(3)也使名义系统 $\Sigma(G,K)$ 的敏感函数矩阵 S 和闭环传递函数矩阵 $H(G,K)$ 的表达式(1)和(2)得到了简化；式(3)也保证了 $S\in RH_\infty$.式(4)和(5)定义了名义系统 $\Sigma(G,K)$ 的敏感函数矩阵 S 和闭环传递函数矩阵 $H(G,K)$ 的 H_∞ 上限.

与名义系统相对应,这里用 $\Sigma(G_\Delta,K_\Delta)$,$H(G_\Delta,K_\Delta)$,$S_\Delta$,$G_\Delta$,$K_\Delta$ 来分别表示稳定反馈不确定性(图2)系统、摄动传递函数矩阵、摄动敏感函数矩阵、摄动控制对象和摄动控制器的传递函数矩阵.

3 主要结果

定理1. 图1所示系统同时具有图2所示的两种结构不确定性,并有假设1成立,如果

$$\|\Delta_{gf}\|_\infty \leqslant \frac{\alpha}{\|V\|_\infty\|\widetilde{N}\|_\infty}, \quad \|\Delta_{kf}\|_\infty \leqslant \frac{\beta\|V\|_\infty}{\|U\|_\infty}, \tag{6),(7}$$

$$\alpha + \alpha\beta + \beta\|\widetilde{M}\|_\infty\|V\|_\infty \leqslant h, \quad 0 \leqslant h < 1, \tag{8),(9}$$

其中 α 和 β 是非负常数,则

1)摄动系统 $\Sigma(G_\Delta,K_\Delta)$ 的敏感函数矩阵 S_Δ 保持真稳定,且

$$\|S_\Delta\|_\infty \leqslant \eta + \frac{\alpha(1+\beta)}{1-h} + \frac{h+\beta}{1-h}\|V\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty; \tag{10}$$

2)摄动系统 $\Sigma(G_\Delta,K_\Delta)$ 的闭环传递函数矩阵 $H(G_\Delta,K_\Delta)$ 保持真稳定,且

$$\begin{aligned}\|H(G_\Delta,K_\Delta)\|_\infty \leqslant \gamma + \max\Big\{&\frac{h+\beta}{1-h}\|V\|_\infty\|\widetilde{N}\|_\infty, \frac{h}{1-h}\|U\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty + \\ &\frac{\alpha\|U\|_\infty}{(1-h)\|V\|_\infty}\Big\} + \max\Big\{\frac{\alpha(1+\beta)}{1-h} + \\ &\frac{h+\beta}{1-h}\|V\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty, \frac{h}{1-h}\|U\|_\infty\|\widetilde{N}\|_\infty\Big\}.\end{aligned} \tag{11}$$

证明.

1)由图1和图2有

$$G_\Delta = (I - G\Delta_{gf})^{-1}G = (\widetilde{M} - \widetilde{N}\Delta_{gf})^{-1}\widetilde{N}, \tag{12}$$

$$K_\Delta = K(I - \Delta_{kf}K)^{-1} = U(V - \Delta_{kf}U)^{-1}, \tag{13}$$

则

$$I - G_\Delta K_\Delta = (\widetilde{M} - \widetilde{N}\Delta_{gf})^{-1}(I - \Delta_*)(V - \Delta_{kf}U)^{-1}, \tag{14}$$

其中 $\Delta_* = \widetilde{M}\Delta_{kf}U + \widetilde{N}\Delta_{gf}V - \widetilde{N}\Delta_{gf}\Delta_{kf}U$,且在式(14)的推导过程中用到了式(3).

由式(14)进而有

$$S_\Delta = (I - G_\Delta K_\Delta)^{-1} = (V - \Delta_{kf}U)(I - \Delta_*)^{-1}(\widetilde{M} - \widetilde{N}\Delta_{gf}). \tag{15}$$

由条件(6)~(9)有

$$\begin{aligned}\|\Delta_*\|_\infty \leqslant &\|\widetilde{M}\|_\infty\|\Delta_{kf}\|_\infty\|U\|_\infty + \|\widetilde{N}\|_\infty\|\Delta_{gf}\|_\infty\|V\|_\infty + \\ &\|\widetilde{N}\|_\infty\|\Delta_{gf}\|_\infty\|\Delta_{kf}\|_\infty\|U\|_\infty \leqslant \beta\|V\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty + \alpha + \alpha\beta \leqslant h < 1.\end{aligned} \tag{16}$$

由式(16)即有 $(I-\Delta_*)^{-1} \in RH_\infty$,由式(15)进而有 $S_\Delta \in RH_\infty$.

令 $Z = (I-\Delta_*)^{-1}$,则

$$\begin{aligned}S_\Delta = &(V - \Delta_{kf}U)Z(\widetilde{M} - \widetilde{N}\Delta_{gf}) = \\ &S + VZ\Delta_*\widetilde{M} - VZ\widetilde{N}\Delta_{gf} - \Delta_{kf}UZ\widetilde{M} + \Delta_{kf}UZ\widetilde{N}\Delta_{gf},\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $S = VM$(见式(2)和(3)). 又知

$$\|Z\|_\infty = \|(I - \Delta_*)^{-1}\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-h}, \tag{18}$$

则由式(16)～(18)以及定理的前提假设有

$$\|S_\Delta\|_\infty \leqslant \|S\|_\infty + \frac{h}{1-h}\|V\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty + \frac{\alpha}{1-h} + \frac{\beta}{1-h}\|V\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty + \frac{\alpha\beta}{1-h}. \tag{19}$$

显然式(19)与式(10)完全等价.

2)不等式(11)的证明思路与上面类似,为节约篇幅,下面的叙述将较简洁.因为$\|Z\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-h}$,$\|\Delta_*\|_\infty \leqslant h$,则

$$\|\Delta_{11}\|_\infty = \|VZ\Delta_*\widetilde{N} - \Delta_{kf}UZ\widetilde{N}\|_\infty \leqslant \frac{h+\beta}{1-h}\|V\|_\infty\|\widetilde{N}\|_\infty, \tag{20}$$

$$\|\Delta_{12}\|_\infty = \|VZ\Delta_*\widetilde{M} - VZ\widetilde{N}\Delta_{gf} - \Delta_{kf}UZ\widetilde{M} + \Delta_{kf}UZ\widetilde{N}\Delta_{gf}\|_\infty \leqslant \frac{h}{1-h}\|V\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty + \frac{\alpha}{1-h} + \frac{\beta}{1-h}\|V\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty + \frac{\alpha\beta}{1-h}, \tag{21}$$

$$\|\Delta_{21}\|_\infty = \|UZ\Delta_*\widetilde{N}\|_\infty \leqslant \frac{h}{1-h}\|U\|_\infty\|\widetilde{N}\|_\infty, \tag{22}$$

$$\|\Delta_{22}\|_\infty = \|UZ\Delta_*\widetilde{M} - UZ\widetilde{N}\Delta_{gf}\|_\infty \leqslant \frac{h}{1-h}\|U\|_\infty\|\widetilde{M}\|_\infty + \frac{\alpha\|U\|_\infty}{(1-h)\|V\|_\infty}. \tag{23}$$

将式(20)～(23)代入不等式$\|H(G_\Delta,K_\Delta)\|_\infty \leqslant \|H(G,K)\|_\infty + \max\{\|\Delta_{11}\|_\infty, \|\Delta_{22}\|_\infty\} + \max\{\|\Delta_{12}\|_\infty, \|\Delta_{21}\|_\infty\}$中去,便可得到式(11).

说明.

(a)在上述定理中,若$h=0$,则由式(8)可推出$\alpha=\beta=0$,即稳定反馈结构不确定性Δ_{gf}和Δ_{kf}均不存在.此时,由式(10)和(11)可看出$\|S_\Delta\|_\infty \leqslant \eta$,$\|H(G_\Delta,K_\Delta)\|_\infty \leqslant \gamma$,即退化为名义系统的上限(式(4)和(5)).若$h \to 1$,在条件(6)～(9)下,摄动系统的敏感函数矩阵$S_\Delta$和闭环传递函数矩阵$H(G_\Delta,K_\Delta)$仍是真稳的,但由式(10)和(11)可以看出,$S_\Delta$和$H(G_\Delta,K_\Delta)$的$H_\infty$摄动上界趋于无穷大,这时的摄动上界显然没有实际意义.若h充分小,S_Δ和$H(G_\Delta,K_\Delta)$的H_∞摄动上界便可以足够精确的逼近相应的性能指标.

(b)若稳定反馈不确定性Δ_{gf}和Δ_{kf}是单独出现时,只需令α和β为零,便可得到相应的鲁棒稳定充分条件和系统性能指标的摄动上界.

(c)在本文的分析过程中,恒等式$(I-GK)^{-1}G=G(I-KG)^{-1}$经常被用到,本文把它当作基本的矩阵知识,没有具体指出和说明.

4　结束语

当稳定反馈摄动与其他几种典型摄动,诸如加、输入乘和输出乘等摄动同时存在时,如何给出较少保守性的鲁棒稳定条件和性能函数的摄动上界,仍有待进一步研究.

参　考　文　献

1　Francis B A. A Course in H_∞ Control Theory, Berlin:Springer-Verlag,1987

2　Vidyasagar M. Control System Synthesis:A Factorization Approach, Cambridge:MIT Press,1985

3　Shao Z, Sawan M J. Sensitivity analysis for systems with structured uncertainty. *Int. J. Systems Science*,1994,**25**

(6):1093～1103

4 Zheng P E, Gao Z W *et al.* sensitivity analysis of systems with all types of structured uncertainty. *Systems Analysis Modelling Simulation*, 1997, **29**(3):207～217

5 Gao Z W. Analysis for performance sensitivity of systems with structured uncertainty. *Control and Intelligent Systems*, 1998, **26**(3):73～76

6 Gao Z W, Zheng P E, Wang X L. Performance sensitivity analysis for linear systems with stable feedback perturbations, *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 1999, **8**(4)

高志伟　1965年生，博士，天津大学控制理论和控制工程学科副教授. 研究方向为奇异系统、分散控制、鲁棒控制等.

王先来　1946年生，天津大学自动化学院教授，博士生导师. 研究方向为自适应控制、模式识别与智能系统等.

王德贤　1973年生，1999年3月于天津大学获硕士学位，现为东方电子集团计算机软件设计工程师. 感兴趣的研究方向为广义系统的强稳定和计算机软件工程.

《自动化学报》征稿简则

一、《自动化学报》是中国自动化学会主办的高级学术期刊，每年出版六期.

二、本刊刊载自动化科学与技术领域的高水平学术论文和科学研究成果. 内容包括：1. 自动控制理论；2. 系统理论与系统工程；3. 自动化技术及其在国民经济各领域中的创造性应用；4. 自动化系统计算机辅助技术；5. 机器人与自动化；6. 人工智能与智能控制；7. 自动控制系统中的新概念、新原理、新方法、新设计；8. 信息理论与信息处理技术，模式识别；9. 自动化学科领域的其它重要问题.

三、本刊发表的文章以论文和短文两种形式为主，并不定期地发表综述与评论性文章、长论文、书刊评论、问题讨论、读者来信和国内外学术活动信息等.

四、本刊原则上只发表原始性稿件，但不排除刊登已在国内外学术会议上发表或准备发表的优秀论文的可能性（对于此种情况，作者必须如实说明）.

五、作者投稿时需签署“作者承诺”.

六、来稿格式及要求

1. 来稿要求论点明确、论证充分、语言通顺、文字简练. 一般定稿时论文不超过6000字；短文不超过3000字；其它形式文章视具体内容由编辑部决定. 对重要成果进行系统、完整叙述的长论文字数可稍长. 长论文稿件，作者在投稿时必须注明.

2. 稿件首页应包括下列内容：标题；作者姓名、工作单位、详细通讯地址（包括邮政编码）、E－mail、电话号码；论文摘要；关键词；用英文书写的上述内容.

3. 论文和短文的文章结构请参照本刊最近发表的文章格式. 论文摘要在200字以内；短文100字左右. 文中缩写词（中文或英文）须在首次出现时注明全称；公式、图、表均须分别用阿拉伯数字全文统一编号.

4. 计量单位一律用国际单位，即 SI 单位制. 名词术语必须规范化、标准化，前后一致. 外国人名、地名、书刊名称除已通用者外一律用原文.

（下转第377页）