第26卷　第3期
2000年5月

自　动　化　学　报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 3
May, 2000

短文

单向执行器系统配置的完整性[1)]

张　兵[*]　吴宏鑫
（北京控制工程研究所　北京　100080）
（* Email: zhb@public2. east. net. cn）

摘　要　提出了配置完整性的概念，用来表征单向执行器系统控制作用的生成能力. 并且将配置完整性归结为线性方程组正解的存在性问题，给出了配置矩阵完整性的若干性质和判别条件及其相应的判别步骤.

关键词　执行器配置，单向执行器，完整性，冗余.

COMPLETE CONFIGURATIN OF UNIDIRECTIONAL ACTUATOR SYSTEM

ZHANG Bing　WU Hongxin
(*Beijing Institute of Control Engineering, Beijing*　100080)

Abstract　The paper proposes the notion of the complete configuration of unidirectional actuator system to evaluate the control capability of the actuator system and ascribe it to the existence of positive solutions of linear equations. Several characteristics and the schemes to determine the completeness are also provided.

Key words　Actuator configuration, unidirectional actuator, completeness, redundancy.

1　引　言

在实际的工程系统，尤其是多变量运动控制系统中，存在着一类特殊的执行机构，对个别的执行器来说，其作用大小可变而作用方向固定，因而需要配置多个执行器，组成执行器系统，通过多个执行器作用的叠加来实现需要的控制指令，这里称其为定向执行器(directional actuator). 进一步，如果作用大小可正可负，也就是其可实现的作用集在指令

1）国家自然科学基金和"862-2-4"课题资助项目. 本文曾在1998年中国控制会议上宣读.
收稿日期　1998-03-30　　收修改稿日期　1999-01-08

空间中为直线,则称为双向执行器(bi-directional actuator),如飞机上的某些控制翼面;而象航天器的推力器,当其点火时只能使航天器绕某个固定轴朝一个方向进行旋转机动,也就是其可实现的作用集在指令空间中为射线,这里称为单向执行器(unidirectional actuator).

由于定向执行器系统是通过多个执行器单元作用的组合来产生所需的控制指令,所以其控制能力在很大程度上取决于执行器配置的数量、布局、指向等特征.本文中提出的配置的完整性便是对执行器系统完成所需控制指令能力的描述.工程中总是针对具体的对象,和特定的控制任务来进行配置的设计[1,2].在有关多执行器系统的研究中,Wayne[3]以飞控系统为背景,研究了飞机的冗余双向执行器系统的控制作用生成能力与作用分配问题,而对双向执行器来说,最终的控制指令输出是各执行单元作用的简单线性组合,只要配置矩阵行满秩就可以保证其完整性.但单向执行器系统中,控制指令输出仅是各执行单元作用的凸组合,完整性问题要复杂一些,以空间推力器系统为背景,Crawford[4]给出了许多相关的结论,如单向执行器系统冗余度的判别方法,提出了最小冗余结构,但其判别过程在指令维数较高和执行器数量多时运算量比较大.由于配置矩阵是单向执行器系统配置特征的综合反映,本文抽取了其中的一般特征,来讨论配置矩阵与其完整性的关系.

对单向执行器而言,由于作用单元只能产生某个固定方向的作用,所以必须通过多个执行器作用的组合来产生所需的多维控制指令.其基本作用关系可用下式描述

$$\boldsymbol{u} = C\boldsymbol{u}_a. \tag{1}$$

上式中 $\boldsymbol{u}\in R^n$ 为指令向量,n 为指令维数,其大小由控制任务决定;m 为执行器个数,通常 $m>n$;$C\in R^{n\times m}$ 是配置矩阵,其列向量分别为各执行器单独作用时产生的指令作用;m 维作用向量 $\boldsymbol{u}_a$ 为对每个执行器分配的作用,且其元素皆非负,简记为 $\boldsymbol{u}_a\in R^m_+$,非负约束说明执行器是单向的.

单向执行器系统的控制,就是在给定的指令情况下,确定出各作用单元的作用量,并满足一定约束条件和优化性能指标.执行器系统可以产生任意指令矢量的前提是,由式(1)所描述的正约束方程组对任意的左端向量 $\boldsymbol{u}\in R^n$ 都可解,而这在很大程度上取决于执行器系统的配置.这里首先给出下面定义.

定义1. 对配置矩阵 $C\in R^{n\times m}$,如果指令域 $S_a=\{\boldsymbol{x}\mid \|\boldsymbol{x}\|_p\leqslant v_d,\boldsymbol{x}\in R^n\}\subseteq S_c$,则称单向执行器系统的配置矩阵 C 完整,其中 $S_c=\{\boldsymbol{u}\mid \boldsymbol{u}=C\boldsymbol{u}_a,\boldsymbol{u}_a\in R^m_+\}$ 为可控域,指令域 S_a 取决于干扰作用强度和期望机动的大小,v_d 为阈值.

易知配置矩阵 $C\in R^{n\times m}$ 完整的几个等价的命题是,$S_c=R^n$,或 $C\in R^{n\times m}$ 的列向量($\boldsymbol{c}_i$,$i=1,2,\cdots,m$)张成的凸多面锥 $\left\{\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{c}_i \mid k_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m\right\}=R^n$,或方程 $\boldsymbol{u}=C\boldsymbol{u}_a$,$\boldsymbol{u}_a\in R^m_+$ 对任意 $\boldsymbol{u}\in R^n$ 都有解.

上述问题实质上是关于一个线性方程组非负解的存在性,因而可以很容易推广到单向执行器系统的冗余度、线性规划的可行性以及正输入系统的能控性等问题中[5~7].

2　配置完整性的性质与判别

引理1. 配置矩阵 C 完整的充要条件是,C 行满秩且所有线性无关的 $n-1$ 个列向量张

成的超平面两侧都包含 C 中的其它列向量[4].

根据引理1可以对配置完整性问题进行判别,但需对 $m!/((n-1)!(m-n+1)!)$个超平面进行校验,在处理多维指令和多个执行器的情况时,计算量较大.

下面先给出几个有关完整性的新性质.

性质1. 如果配置矩阵 C 完整,则 $\widetilde{C}=PC$ 完整,其中 $P\in R^{n\times n}$满秩(证略).

性质2. 对于完整的配置矩阵 $\widetilde{C}_1=[C\ \vdots\ \boldsymbol{a}]$,$C\in R^{n\times m}$,$\boldsymbol{a}\in R^n$,如果存在 $\boldsymbol{x}\in R_+^j$,使得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$,$A\in R^{n\times j}$,则配置矩阵 $\widetilde{C}_2=[C\ \vdots\ A]$完整(证略).

由于交换配置矩阵列向量的顺序不影响其完整性,所以对任意行满秩配置矩阵 $C_0\in R^{n\times m}$,总可以通过交换列得到 $C=[C_1\ \vdots\ C_2]\in R^{n\times m}$,而且 $C_1\in R^{n\times n}$满秩,$C_2\in R^{n\times(m-n)}$.取变换阵 $P=C_1^{-1}$,使得

$$\widetilde{C}=PC=[I_n\ \vdots\ C_1^{-1}C_2]=[I_n\ \vdots\ \bar{C}]. \tag{2}$$

由性质1可知配置矩阵 $\widetilde{C}$ 的完整性与 C 的相同,下面讨论对于形如式(2)配置矩阵 $\widetilde{C}$ 的完整性条件.为了叙述方便,先给出下面的定义.

定义2. 对于矩阵 $\bar{C}\in R^{n\times j}(j\geqslant 1)$,如果约束不等式方程组,$\bar{C}\boldsymbol{x}<0$,$\boldsymbol{x}\in R_+^j$有解,称 $\bar{C}$ 可负,其中向量小于零指其所有元素都小于零.

定理1. 配置矩阵$[I_n\ \vdots\ \bar{C}]\in R^{n\times m}(m\geqslant n+1)$完整的充要条件是 $\bar{C}$ 可负.

证明.

1)充分性.首先考虑配置矩阵$[I_n\ \vdots\ \boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\cdots\boldsymbol{e}_i\cdots\boldsymbol{e}_n\quad \boldsymbol{b}](i=1,2,\cdots,n)$的完整性,其中 $\boldsymbol{b}$ 为任意小于零的 n 维向量,简记为 $\boldsymbol{b}\in R_-^n$ 或 $\boldsymbol{b}<0$.$[I_n\ \vdots\ \boldsymbol{b}]$的所有由 $n-1$个线性无关列向量组成的子矩阵可以表示成如下两种形式:

$$C_i=[\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_{i-1}\boldsymbol{e}_{i+1}\quad \boldsymbol{e}_{i+2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_n],\quad i=1,\cdots,n, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{e}_i=[e_{i1}\quad e_{i2}\quad \cdots\quad e_{in}]^{\mathrm{T}}$,$e_{ij}=\begin{cases}0,j\neq i,\\1,j=i;\end{cases}$

$$C_i=[\boldsymbol{e}_1\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_{s-1}\quad \boldsymbol{e}_{s+1}\quad \cdots\boldsymbol{e}_{t-1}\quad \boldsymbol{e}_{t+1}\quad \cdots\quad \boldsymbol{e}_n\quad \boldsymbol{b}], \tag{4}$$

其中$1\leqslant s<t\leqslant n$,$i=n+1,\cdots,n+\begin{pmatrix}n\\2\end{pmatrix}$.

在式(3)型的子矩阵中,经其所有列向量的 $n-1$维超平面可以写成 $H^1=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,\boldsymbol{x}\in R^n\}$,其上半空间和下半空间分别为 $H_+^1=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}\in R^n\}$和 $H_-^1=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}<0,\boldsymbol{x}\in R^n\}$,而 C 中不含 C_i 列向量的其它两个列向量为 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{b}$.显然有 $\boldsymbol{e}_i\in H_+^1$,$\boldsymbol{b}\in R_-^1$.

对式(4)型的子矩阵取和 C_i,$i\in\left[n+1,n+\begin{pmatrix}n\\2\end{pmatrix}\right]$所有列向量都正交的列向量

$$\boldsymbol{c}_i=[c_{i1}\quad \cdots\quad c_{ij}\quad \cdots\quad c_{in}]^{\mathrm{T}},j=1,2,\cdots n,$$

其中 $c_{ij}=\begin{cases}0,j\neq s,t,\\b_t,j=s,\\-b_s,j=t,\end{cases}$ $b_s,b_t<0$为向量 $\boldsymbol{b}$ 的第 s 个和第 t 个元素.

经 $C_i\left(i\in\left[n+1,n+\begin{pmatrix}n\\2\end{pmatrix}\right]\right)$所有列向量的 $n-1$维超平面可以写成 $H^2=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,\boldsymbol{x}\in R^n\}$,其上半空间和下半空间分别为 $H_+^2=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}\in R^n\}$和 $H_-^2=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}<0,\boldsymbol{x}\in R^n\}$,$C$ 中不含 C_i 列向量的其它两个列向量为 $\boldsymbol{e}_s$ 和 $\boldsymbol{e}_t$.由于 $\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_s=b_t<0$,$\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_t$

$=-b_s>0$,则 $e_t\in H_+^2$,$e_s\in H_-^2$. 综上,对$[I_n \vdots b]$的所有由 $n-1$个线性无关列向量组成的子矩阵 C_i,$i\in\left[1,n+\binom{n}{2}\right]$,经其列向量的 $n-1$维超平面两侧都包含 C 中的其它列向量. 由引理1可知,$[I_n \vdots b]$完整. 现在考虑$[I_n \vdots \bar{C}]$. 如果 $\bar{C}$ 可负,由定义2知,存在 $x\in R_+^{m-n}$,使得 $\bar{C}x=b<0$,由于对任意 $b\in R_-^n$,$[I_n \vdots b]$完整,再根据性质2,可知$[I_n \vdots \bar{C}]$完整.

2)必要性. $[I_n \vdots \bar{C}]$完整,则对任意 $f\in R_-^n$,必然存在 $t\in R_+^m$,使得$[I_n \vdots \bar{C}]t=f$,进一步有$[I_n \vdots \bar{C}]t=[I_n \vdots \bar{C}]\begin{bmatrix}t_1\\t_2\end{bmatrix}=t_1+\bar{C}t_2=f$. 其中 $t_1\in R_+^n$,$t_2\in R_+^{m-n}$,移项得 $\bar{C}t_2=f-t_1<0$. 所以,存在 $x=t_2\in R_+^{m-n}$,使得 $\bar{C}x<0$,也就是 $\bar{C}$ 可负.　　证毕.

定理1将配置矩阵对任意指令可解的判别问题转化为一个约束不等式方程组解的存在性问题,使问题得到简化.

3　可负性的判别与完整性的判别步骤

下面不加证明地给出 $\bar{C}\in R^{n\times j}(j\geqslant 1)$可负的若干性质和判别条件:

1)如果矩阵 $\bar{C}$ 可负,则 $\bar{C}$ 不存在全为非负元素的行;

2)如果矩阵 $\bar{C}$ 中某列全为负,则 $\bar{C}$ 可负;

3)如果矩阵 $\bar{C}$ 可负,则 $P\bar{C}$ 可负,其中 $P\in R^{m\times n}$满秩且其所有元素非负;

4)如果 $\bar{C}Q$ 可负,则 $\bar{C}$ 可负,其中 $Q\in R^{j\times j}$满秩且其所有元素非负;

5)如果 $\bar{C}$ 可负,则 $\bar{C}$ 能通过一系列行正变换化为 C_t,使得 C_t 某些列组成的子矩阵不包含全为非负元素的行;

6)如果 $\bar{C}$ 能通过一系列列正变换,使得其中一列全为负,则 $\bar{C}$ 可负.

利用性质1、定理1和上述可负性的判别条件,便可以进行任意配置矩阵的完整性判别. 判别步骤如下:

1)如果配置矩阵 C 不是行满秩的,则必然不完整;

2)对任意行满秩配置矩阵,通过交换列得到 $C=[C_1 \vdots C_2]\in R^{n\times m}(m\geqslant n+1)$,使得 $C_1\in R^{n\times n}$满秩,$C_2\in R^{n\times(m-n)}$;

3)取变换阵 $P=C_1^{-1}$,对配置矩阵 C 进行非奇异变换,化成$[I_n \vdots \bar{C}]$的型式;

4)对 $\bar{C}$ 进行可负的判别,$\bar{C}$ 可负则 C 完整,反之则不完整.

4　结　论

本文讨论了单向执行器系统完整性的判别问题,将其转化为判别一个矩阵的可负性,给出了完整性判别的一种简化条件和判别方法. 基于上述方法很容易对单向执行器系统配置的完整性进行判别,限于篇幅这里将实例略去. 而且这些结论可以很容易推广到单向执行器系统的冗余度判别、线性规划的可行性以及正输入系统的能控性等问题[5~7].

参　考　文　献

1　Elgersma M *et al*. Space station attitude control using reaction control jets. In: Proc. of 31st Conference of

Decision and Control, 832～838

2 Wiktor P J. Minimum control authority plot: A tool for designing thruster systems. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1994. **17**(5): 998～1006

3 Durham Wayne C. Constrained control allocation. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1993, **16**(4): 717～725

4 Crawford B S. Configuration design and efficient operation of redundant multi-jets systems. In: Proc. of AIAA Guidance Control and Flight Mechanics Conference, 1969, 69～845

5 张兵. 反作用控制系统容错控制方法研究及应用[博士学位论文]. 中国空间技术研究院北京控制工程研究所, 1998

6 Zhang Bing, Wu Hongxin. Sliding mode control for detumbling rigid spacecraft with underactuated configuration. In: Proc. of the 14th World Congress of International Federation of Automatic Control '99(IFAC'99), Volume P, Preprints Number: P-8a-03-5, 337～342

7 张兵, 吴宏鑫, 李智斌. 线性正输入系统的能控性. 见: 1999年中国智能自动化学术会议论文集(上册), 清华大学出版社, 1999年, 511～517

张 兵 1970年生，1992和1995年在重庆大学自动化系分别获学士和硕士学位，1998年12月在北京控制工程研究所获博士学位. 研究领域有容错控制、故障检测与诊断和航天控制等.

吴宏鑫 见本刊第18卷第2期.

(上接第391页)

序号	项目名称	主要内容	时间	人数	会期(天)	地点	联系人	备注
12	调节阀和流量、物位仪表应用技术专题学术会议	新型调节阀的发展、现场总线技术与调节阀、气缸执行机构的发展及典型应用，电动执行机构的发展及典型应用，现场总线技术在物位仪表中的应用等	8月	100	3	待定	吴斌昌 上海市漕宝路103号 邮编:200233 电话:(021)62933919	由仪表与装置专业委员会主办
13	环境保护和水(污水)处理的控制系统学术交流会	有关环境保护和污水处理综述，污水处理的检测特点和仪表，垃圾处理的检测特点和仪表等	11月	100	3	上海	同上	同上
14	全国第九届空间及运动体控制技术学术研讨会	空间及运动体控制专业委员会例行学术年会	3季度	80	3	青岛	李静 北京2729信箱 邮编:100080 电话:68378650	由空间及运动体控制专业委员会和中国宇航学会空间控制专业委员会联合举办

(下期待续)