



一类非线性奇异系统的观测器设计¹⁾

王晶* 刘晓平

(东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110006)

(* E-mail: w-j 106@263.net)

摘要 讨论了一类局部可观测的非线性奇异系统,首先基于非线性坐标变换进行完全线性化,然后再用类似 Luenberger 方法进行降阶观测器设计.仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词 奇异系统,局部可观测,相对阶,降阶观测器.

ON THE OBSERVER DESIGN FOR A CLASS OF NONLINEAR SINGULAR SYSTEMS

WANG Jing LIU Xiaoping

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract A class of nonlinear singular system which is locally observable is considered. First the given system is completely linearized on the basis of non-linear coordinate transformation, then reduced-observer is designed using the similar Luenberger method. Simulation results illustrate the validity of this method.

Key words Singular system, locally observable, relative degree, reduced-observer.

1 引言

观测器设计是奇异系统控制理论中一个较为重要的课题.目前关于它的研究成果很少^[1~3],且大多局限于线性奇异系统.本文就非线性奇异系统的观测器设计进行讨论,其构造基于非线性坐标变换,且阶数比待观测系统低.在某些较为平凡的假定下(局部可观测和函数的一致 Lipschitz 性),该观测状态局部渐近趋向于实际状态.

2 非线性坐标变换

考虑如下非线性奇异系统

1) 国家教委跨世纪优秀人才培养计划基金、归国留学人员基金、国家自然科学基金资助课题.

$$\dot{x} = f_1(x) + p_1(x)z + g_1(x)u, x \in X \subset R^n, \tag{1a}$$

$$0 = f_2(x) + p_2(x)z + g_2(x)u, z \in Z \subset R^s, \tag{1b}$$

$$y = h(x), \tag{1c}$$

其中控制输入 $u \in U \subset R^m, U = \{u: \|u\| \leq M, \forall t \geq 0\}$ 是一致有界函数集.

假设在 x_0 邻域内 $\text{rank}[p_2(x)] = \text{rank}[p_2(x) \quad g_2(x)] = l \leq s$, 则系统(1)的约束方程总可以写成 $f_2^i(x) = 0 (i=1, \dots, s-l)$ 和 $f_2^j(x) + p_2^j(x)z + g_2^j(x)u = 0 (j=s-l+1, \dots, s)$ 两部分. 如果存在一系列正整数 $\rho_1, \dots, \rho_{s-l}$, 使得

1) 在 x_0 邻域内, 对所有 $0 \leq k \leq \rho_i - 2, i=1, \dots, s-l$,

$$[L_{p_1} L_{f_1}^k f_2^i(x) \quad L_{g_1} L_{f_1}^k f_2^i(x)] = 0;$$

2) $\text{rank}[b(x)] = \text{rank}[b(x) \quad c(x)] = s$, 其中 $[b(x)]_{s \times l}, [c(x)]_{s \times l}$ 满足

$$b_i(x) = L_{p_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} f_2^i(x), \quad c_i(x) = L_{g_1} L_{f_1}^{\rho_i - 1} f_2^i(x), \quad i = 1, \dots, s-l,$$

$$b_i(x) = p_2^i(x), \quad c_i(x) = g_2^i(x), \quad i = s-l+1, \dots, s.$$

那么就称 ρ_i 为约束函数关于 z 和 u 的相对阶, 它可通过对约束方程 $f_2^i(x) = 0 (i=1, \dots, s-l)$ 的多次求导而得. 为方便, 设向量 $[a(x)]_{s \times l}$ 为

$$a_i(x) = L_{f_1}^{\rho_i} f_2^i(x), i = 1, \dots, s-l; \quad a_i(x) = f_2^i(x), \quad i = s-l+1, \dots, s.$$

可以看出系统(1)的状态 x 被限制在 $n - \sum_{i=1}^{s-l} \rho_i$ 维的流形 N 上, 其中

$$N = \{x \in X: f_2^i(x) = L_{f_1} f_2^i(x) = \dots = L_{f_1}^{\rho_i - 1} f_2^i(x) = 0, \forall 1 \leq i \leq s-l\}.$$

定义 $\phi_0^i(x) = h_i(x), i=1, \dots, p$, 执行计算输出相对阶的算法^[4]可得一系列正整数 γ_i

和光滑函数 $\phi_k^i(x), i=1, \dots, p, k=0, \dots, \gamma_i - 1$. 如果矩阵 $\begin{bmatrix} b(x) & c(x) \\ \bar{b}(x) & \bar{c}(x) \end{bmatrix}$ 在 x_0 的邻域内是行满秩的, 那么 γ_i 就是输出函数关于 z 和 u 的相对阶, 其中 $\bar{a}(x), \bar{b}(x), \bar{c}(x)$ 皆为 $p \times 1$ 维光滑列向量, 且 $\bar{a}_i(x) = L_{f_1} \phi_{\gamma_i - 1}^i(x), \bar{b}_i(x) = L_{p_1} \phi_{\gamma_i - 1}^i(x), \bar{c}_i(x) = L_{g_1} \phi_{\gamma_i - 1}^i(x)$.

假定1. 系统(1)具有关于 z 和 u 的约束相对阶 $\rho_i, i=1, \dots, s-l$.

假定2. 系统(1)具有关于 z 和 u 的输出相对阶 $\gamma_i, i=1, \dots, p$.

假定3. $\rho + \gamma = n$, 其中 $\rho = \sum_{i=1}^{s-l} \rho_i, \gamma = \sum_{i=1}^p \gamma_i$.

我们称满足上述三个假定的系统(1)在 $(x_0, u_0) \subset N \times U \subset R^n \times R^m$ 是局部可观测的. 定义 $\chi_j^i = L_{f_1}^{j-1} f_2^i(x), 1 \leq j \leq \rho_i, 1 \leq i \leq s-l, \xi_j^i = \phi_{j-1}^i(x), 1 \leq j \leq \gamma_i, 1 \leq i \leq p$, 则映射 $\Phi(x) = [0, \xi]^T = [\chi_1^1, \dots, \chi_{\rho_1}^1, \dots, \chi_1^{s-l}, \dots, \chi_{\rho_{s-l}}^{s-l}, \xi_1^1, \dots, \xi_{\gamma_1}^1, \dots, \xi_1^p, \dots, \xi_{\gamma_p}^p]^T$ 在 x_0 点是局部微分同胚的, 即 $\Phi(x)$ 构成了一个新的坐标变换. 在新坐标 (χ, ξ) 下, 系统(1)的状态保持在流形 N 上, 且可写成如下降阶形式

$$\dot{\xi} = A\xi + B\Gamma(\Phi^{-1}(0, \xi), z, u), \tag{2a}$$

$$0 = a(\Phi^{-1}(0, \xi)) + b(\Phi^{-1}(0, \xi))z + c(\Phi^{-1}(0, \xi))u, \tag{2b}$$

$$y = C\xi, \tag{2c}$$

其中 $A = \text{diag}\{A^1, \dots, A^p\}, B = \text{diag}\{B^1, \dots, B^p\}, C = \text{diag}\{C^1, \dots, C^p\}$,

$$A^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in R^{\gamma_i \times \gamma_i}, B^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R^{\gamma_i \times 1}, C^i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \in R^{1 \times \gamma_i}, \forall 1 \leq i \leq p, \tag{3a}$$

$$[\Gamma(\Phi^{-1}(0, \xi), z, u)]_{i \times i} = \tilde{a}_i(\Phi^{-1}(0, \xi)) + \tilde{b}_i(\Phi^{-1}(0, \xi))z + \tilde{c}_i(\Phi^{-1}(0, \xi))u. \quad (3b)$$

3 观测器设计

设 $\phi^i = (\phi_1^i, \dots, \phi_{\gamma_i-1}^i)$ ($1 \leq i \leq p$) 和 $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^p)$. 选取 $K^i = [k_1^i, \dots, k_{\gamma_i-1}^i]^T \neq 0 \in R^{\gamma_i-1}$, $K = \text{diag}\{K^1, \dots, K^p\}$ 及映射 $\omega: N \rightarrow W \subset R^{n-p-\rho}$, $\omega(x) = \phi(x) - Kh(x)$, 即 $\omega_j^i(x) = \phi_j^i(x) - k_j^i h(x)$, $\forall 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \gamma_i - 1, x \in N$, 则由方程(2)可得

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_j^i(x) &= -k_j^i \omega_1^i(x) + \omega_{j+1}^i(x) + (k_{j+1}^i - k_j^i k_1^i h(x)), j = 1, \dots, \gamma_i - 2, \\ \dot{\omega}_{\gamma_i-1}^i(x) &= -k_{\gamma_i-1}^i \omega_1^i(x) + k_{\gamma_i-1}^i k_1^i h(x) + \tilde{a}(x) + \tilde{b}(x)z + \tilde{c}(x)u. \end{aligned}$$

如果定义 $A^i \in R^{(\gamma_i-1) \times (\gamma_i-1)}$, $B^i \in R^{(\gamma_i-1) \times 1}$, $C^i \in R^{1 \times (\gamma_i-1)}$, $\Gamma_i(x, z, u)$ 如式(3a)和(3b)所示, 则

$$\dot{\omega} = (A - KC)\omega + (A - KC)Ky + B\Gamma(x, z, u), \quad (4)$$

且受限输入 z 和控制输入 u 满足 $0 = a(x) + b(x)z + c(x)u$. 另外, 因为 $\Phi(x)^T = (0, \phi_0^1, \phi^1, \dots, \phi_0^p, \phi^p)$ 在 N 上是微分同胚的, 则

$$\Psi(x) = (0, \phi_0^1, \dots, \phi_0^p, \phi^1, \dots, \phi^p) = (0, y, \omega + Ky) = \Pi^{-1} \cdot \Phi^T$$

也是微分同胚的, 其中 Π 是初等变换矩阵. 因此

$$x = \Psi^{-1}(0, y, \omega + Ky), \forall (y, \omega) \in h(N) \times W \subset R^p \times P^{n-p-\rho}, \quad (5)$$

于是可以得到局部可观测系统(1)的降阶观测器

$$\dot{\hat{\omega}} = (A - KC)\hat{\omega} + (A - KC)Ky + B\Gamma(\Psi^{-1}(0, y, \hat{\omega} + Ky), z, u), \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} 0 &= a(\Psi^{-1}(0, y, \hat{\omega} + Ky)) + b(\Psi^{-1}(0, y, \hat{\omega} + Ky))z + \\ &c(\Psi^{-1}(0, y, \hat{\omega} + Ky))u, \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\hat{x} = \Psi^{-1}(0, y, \hat{\omega} + Ky). \quad (6c)$$

对 $\forall 1 \leq i \leq p$, 定义 $\Sigma^i = A^i - K^i C^i$, 则 $\Sigma = A - KC = \text{diag}\{\Sigma^1, \dots, \Sigma^p\}$. 不难看出 Σ 的特征值集合是全部 Σ^i 的特征值 $\{\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{i\gamma_i-1}\}$ 的分离集. 选择 K 使得 $\lambda = \{\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1\gamma_1-1}, \dots, \lambda_{p1}, \dots, \lambda_{p\gamma_p-1}\}$ 满足

$$\lambda_{p\gamma_p-1} < \dots < \lambda_{p1} < \dots < \lambda_{1\gamma_1-1} < \dots < \lambda_{11} < 0. \quad (7)$$

因为 $b(x)$ 是非奇异的, 由受限方程 $0 = a(x) + b(x)z + c(x)u$ 可以求出受限输入

$$z = b^{-1}(\Psi^{-1}(0, y, \omega + Ky)) [a(\Psi^{-1}(0, y, \omega + Ky)) + c(\Psi^{-1}(0, y, \omega + Ky))u] = z^*(\Psi^{-1}(0, y, \omega + Ky), u).$$

此时观测器误差 $\epsilon_\omega = \hat{\omega}(t) - \omega(t)$ 可以由下述微分方程描述

$$\dot{\epsilon}_\omega = (A - KC)\epsilon_\omega + B\Gamma_z(\Psi^{-1}(0, y, \hat{\omega} + Ky), u) - B\Gamma_z(\Psi^{-1}(0, y, \omega + Ky), u),$$

其中 $\Gamma_z(\Psi^{-1}, u) = \Gamma(\Psi^{-1}, z^*(\Psi^{-1}, u), u)$.

定理1. 假设系统(1)在 $(x_0, u_0) \in N \times U$ 是局部可观测的. $x(t)$ 和 $\hat{\omega}(t)$ 分别是在控制 $u \in U$ 作用下系统(1)和(6)的解, 初始条件为 $x(t_0) \in N, \hat{\omega}(t_0) \in W$. 假设

1) Ψ^{-1} 在 N 上是一致 Lipschitz 的;

2) 存在一非减函数 $\mu: R_{\geq 0} \rightarrow R_{\geq 0}$ (有界集 \rightarrow 有界集), 使得对 $\forall (x, u) \in N \times U$,

$$\|\Gamma_z(x_1, u) - \Gamma_z(x_2, u)\| \leq \mu(\|u\|) \|x_1 - x_2\|,$$

则对所有 $\alpha > 0$, 存在一矩阵 $K \in R^{n-p-\rho}$ 和常数 $\delta_1 > 0$, 使得对 $\forall t \geq t_0$,

$$\|\epsilon_\omega(t)\| \leq \delta_1 \|\epsilon_\omega(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)}.$$

如果 Ψ 在 N 上是一致 Lipschitz 的, 则存在一常数 $\delta_2 > 0$, 使得对 $\forall t \geq t_0$,

$$\|\epsilon_x(t)\| \leq \delta_2 \|\epsilon_x(t_0)\| e^{-\alpha(t-t_0)},$$

其中状态误差 $\epsilon_x = \hat{x}(t) - x$, 初始条件为 $\hat{x}(t_0) = \Psi^{-1}(0, y(t_0), \hat{\omega}(t_0) + Ky(t_0))$.

证明. 可由文[5]中定理4.1的证明推广而来.

4 仿真例子

考虑一个平面笛卡儿受限操纵杆的简单例子, 其尾部作用点沿着椭圆运动, 运动方程可以写成

$$\ddot{q}_1 = u_1 + f_1, \quad \ddot{q}_2 = u_2 + f_2, \tag{8}$$

受限方程为 $4(q_1)^2 + (q_2)^2 - 1 = 0$, 受限作用力可以写成 $f_1 = 8q_1\lambda, f_2 = 2q_2\lambda$, 这里 λ 是受限乘子.

选择位置坐标 q_1 作为系统输出及 $k=1$, 根据上节中给出的方法可对系统(8)进行降阶观测器设计. 由仿真结果可以看出观测器的观测状态(虚线)渐近趋向于系统的实际状态(实线), 如图1所示.

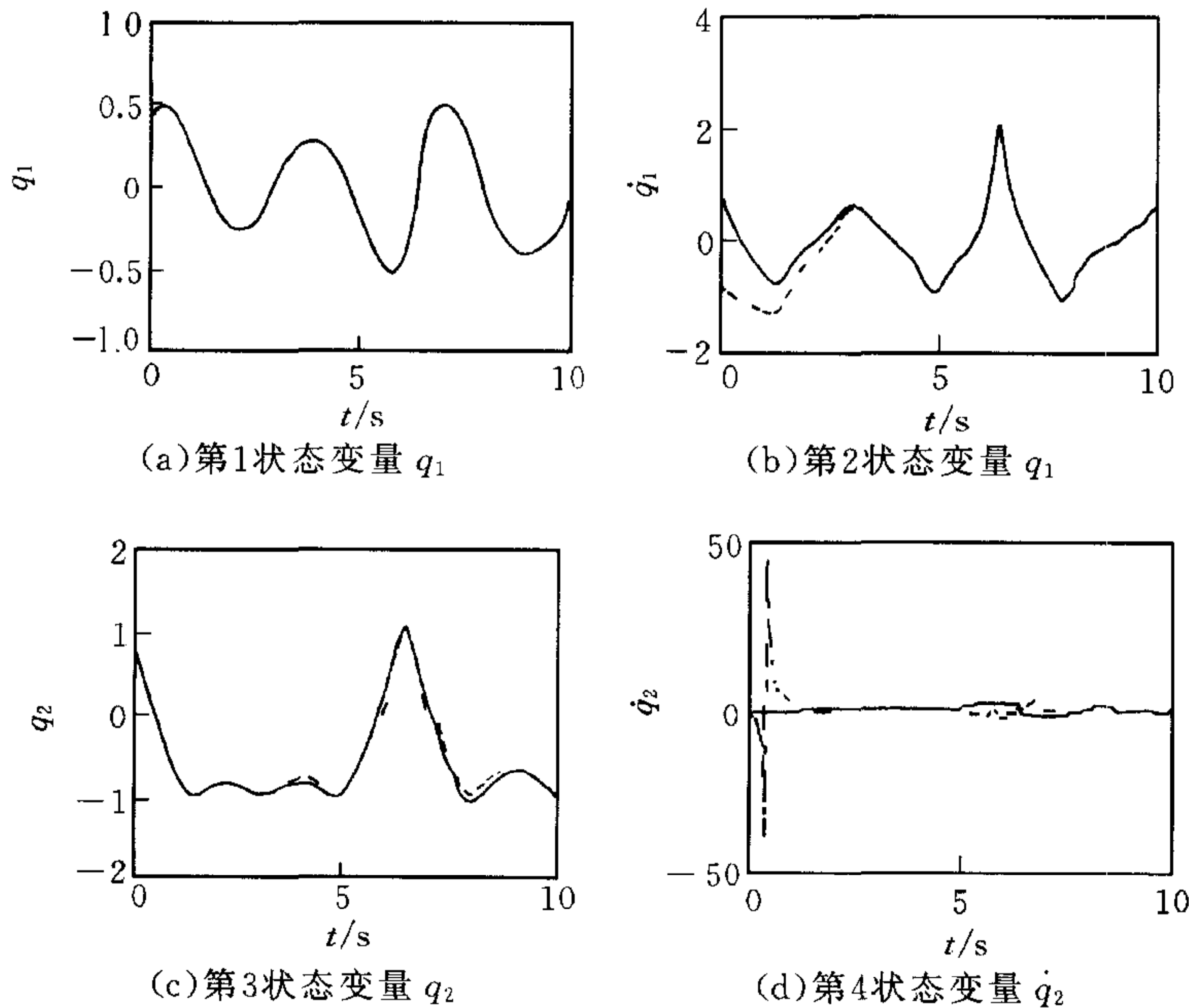


图1 实际状态(实线)与观测状态(虚线)的比较, $k=1$

5 结论

本文提出了一类仿射非线性奇异系统的降阶状态观测器设计, 首先在局部可观测的假设条件下, 将系统完全线性化, 然后再对该线性化系统进行观测器设计. 该观测器的主要特征就是如果把该观测器作为环路的一部分, 则闭环控制系统是稳定的. 而且它的阶数

要远远低于被观测系统的阶数,即大大地降低了获得模拟状态所需要求解的微分方程的个数.

参 考 文 献

- 1 Boutayeb M, Darouach M *et al.* Asymptotic observers for a class of nonlinear singular systems. In: Proc. American Control Conference, Baltimore, Maryland, 1994, 1440~1441
- 2 Kaprielian S, Turi J. An observer for a nonlinear descriptor systems. In: Proc. Conf. Decision and Control, Tucson, Arizona, 1992, 975~976
- 3 Müller P C, Hou M. On the observer design for descriptor systems. In: Proc. Conf. Decision and Control, Brighton, England, 1991, 1960~1961
- 4 Liu XP. Disturbance decoupling for affine nonlinear singular system. In: Proc. IFAC, 1996, 239~244
- 5 Garcia R A, D'Attellis C E. Trajectory tracking in nonlinear system via nonlinear reduced-order observers. *Int. J. Control*, 1995, **62**: 685~715

王 晶 1972年生. 分别于1994, 1998年在东北大学自动控制系获学士学位和博士学位. 现在北京化工大学自动化系工作. 主要研究方向为非线性奇异系统、非线性控制系统几何理论等.

刘晓平 1962年生. 现任东北大学自动控制系教授, 博士生导师. 主要研究方向为最优控制、微分对策、非线性奇异系统、非线性控制系统几何理论及机器人控制等.

(上接第364页)

5. 参考文献按文中出现的先后次序排列, 文献如为期刊时, 按编号, 作者(姓在前如 Wiener L N, Kalman R E, Wang H.). 文章题目, 期刊名(外文可根据国际惯例使用缩写词), 年份, 卷号(期号): 页码顺序编排. 文献如为图书时, 则按编号, 作者(姓在前). 书名, 版次(初版不写), 出版地点: 出版者, 年份, 页码顺序排列. 文中未引用的文献不得列入参考文献栏目.

6. 来稿请用 A4纸1.5倍行距打印.

七、作者必须对稿件内容的真实性和可靠性负责.

八、本编辑部在收稿后一周内通知作者, 并在稿件修订过程中与作者保持联系. 如果作者在来稿中不作特殊说明, 编辑部将只与第一作者联系.

九、已被本刊接受发表的稿件, 按审查意见和“作者加工稿件须知”修改后一式两份同软盘一起寄编辑部. 并需附所有作者的简介.

十、来稿刊登与否由编委会最后审定. 编委会对来稿作适当文字删改或退请作者修改. 来稿一经发表, 按篇酌付稿费, 并赠送当期杂志1本及30份抽印本. 经审查后不拟刊登的文稿, 一般在半年内退还.

十一、来稿(一式叁份)请寄北京市中关村中国科学院自动化研究所转《自动化学报》编辑部, 邮政编码100080. E-mail: aas@ sunserver. La. ac. cn