

非线性交叉严格反馈系统的 一种构造性设计方法¹⁾

官 琪 田玉平

(东南大学自动控制系 南京 210096)

(E-mail: yptian@ seu. edu. cn)

摘 要 讨论非线性交叉严格反馈(cross strict feedback)系统的镇定问题,针对这类系统首次提出交叉回退(cross backstepping)设计方法,证明了整个控制系统的全局稳定性,并用仿真算例验证了方法的正确性.其结果大大拓宽了 backstepping 方法的适用范围.

关键词 非线性系统,交叉严格反馈系统, Lyapunov 函数, backstepping 方法.

A CONSTRUCTIVE DESIGN METHOD FOR NONLINEAR CROSS STRICT FEEDBACK SYSTEMS

GONG Qi TIAN Yuping

(Department of Automatic Control, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract This paper discusses the problem of stabilization of cross strict feedback systems. A design method based on cross backstepping is proposed for the class of systems in question. We prove the global asymptotic stability of the control system and show the effectiveness of our method through a simulation example. The method of this paper greatly extends the application area of the backstepping framework.

Key words Nonlinear systems, cross strict feedback systems, Lyapunov function, backstepping.

1 引言

Lyapunov 函数在非线性控制系统的设计中有着极其重要的作用.长期以来,关于 Lyapunov 稳定性理论虽取得了许多结果,但对于如何构造 Lyapunov 函数,特别是用于系统设计的控制 Lyapunov 函数,至今仍缺乏系统的方法.80 年代前苏联学者 A. A. Kolesnikov 对一类非线性系统首先提出了一种递归优化设计方法^[1],但并未讨论该方法

1) 国家攀登计划和国家自然科学基金资助项目.

与 Lyapunov 函数构造之间的关系. 稍后, A. Saberi, P. V. Kokotovic 和 H. J. Sussmann 等人对部分线性的严格反馈系统提出所谓 backstepping 设计方法^[2], 这种方法采用反向递归设计, 逐步迭代设计 Lyapunov 函数, 最终实现系统镇定或跟踪. Backstepping 算法有两个主要的优点: 1) 它通过反向设计 (recursive design) 使控制 Lyapunov 函数和控制器的设计过程系统化、结构化; 2) 可以控制相对阶为 n 的非线性系统, 消除了经典无源性设计中相对阶为 1 的限制. Backstepping 方法一经提出, 便得到广泛的关注, 并被推广到自适应控制、鲁棒控制等领域^[3,4].

Backstepping 方法首先是针对单输入系统提出的, 后来被推广到多输入系统, 但系统结构仍需满足所谓块严格反馈 (block strict feedback) 条件^[5]. 这在很大程度上限制了这一方法的应用范围. 在本文中我们针对一类更为广泛的非线性多输入系统——交叉严格反馈 (cross strict feedback) 系统, 首次提出交叉回退 (cross backstepping) 设计方法, 证明了整个控制系统的全局稳定性, 并用仿真算例验证了方法的正确性. 本文结果大大拓宽了 backstepping 方法的适用范围.

2 交叉严格反馈系统的镇定

考察由 (1.1) 和 (1.2) 耦合而成的非线性控制系统 (以下简称系统 (1))

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_3 = x_5 + f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2i-1} = x_{2i+1} + f_{2i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2i-1}), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n-1} = u_1 + f_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}); \end{cases} \quad (1a)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, x_5), \\ \dot{x}_4 = x_6 + f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2i} = x_{2i+2} + f_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_{2i+1}, x_{2i+3}), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2n} = u_2 + f_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}). \end{cases} \quad (1b)$$

这里, $f_i (i=1, \dots, 2n)$ 满足 Lipschitz 连续性条件, $f_i (i=1, \dots, 2n-2)$ 的各阶导数均存在, 且有 $f_i(0)=0$, u_1, u_2 是控制变量. 状态 $x(t)$ 由其初始值 $x(0)$ 和 $u(t)$ 唯一决定. 显然, 这一系统在结构上不满足严格反馈条件, 也不属于块严格反馈系统^[5], 因此, 不能用现有的 backstepping 或 block backstepping 方法设计控制器. 然而, 我们注意到, 该系统可看成由两个互相交叉耦合的子系统构成, 而这两个子系统分别对奇数状态 $(x_1, x_3, \dots, x_{2n-1})$ 和偶数状态 $(x_2, x_4, \dots, x_{2n})$ 又都构成严格反馈系统. 利用系统的这一特点我们提出如下交叉回退 (cross backstepping) 设计方法.

2.1 u_1 的设计

步骤 1. 设 x_3 为 $\{x_1\}$ 子系统的“虚拟控制”, 若取 $x_3 = \alpha_1(x_1) = -f_1(x_1) - x_1$, 则对半

正定函数 $V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$, 有 $\dot{V}_1(x_1)|_{(x_3=a_1)} = -x_1^2 \leq 0$.

步骤 2. 设 x_5 为 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 子系统的“虚拟控制”, 令 $z_1 = x_3 - a_1(x_1)$. 取

$$V_3(x_1, x_2, x_3) = V_1 + \frac{1}{2}z_1^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}z_1^2,$$

则有 $\dot{V}_3 = -x_1^2 + x_1 \cdot z_1 + z_1 \cdot \dot{z}_1 = -x_1^2 + z_1(x_1 + x_5 + f_3(x_1, x_2, x_3) - \dot{a}_1(x_1))$. 若取 $x_5 = \alpha_3(x_1, x_2, x_3) = -z_1 - x_1 - f_3(x_1, x_2, x_3) + \dot{a}_1(x_1)$, 则 $\dot{V}_3 = -x_1^2 - z_1^2 \leq 0$.

显然, 当 $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv 0$ 时, 因为 $f_3 \equiv 0$, 故 $\alpha_3 \equiv 0$.

步骤 k. 假设当 $k=1, 2, \dots, i$ 时, 子系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, x_5), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2i-1} = x_{2i+1} + f_{2i-1}(x_1, \dots, x_{2i-1}) \end{cases} \quad (2)$$

存在“虚拟控制” $x_{2i+1} = \alpha_{2i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2i-1})$, 使得子系统(2)关于半正定函数 $V_{2i-1}(x_1, \dots, x_{2i-1}) = V_{2i-3} + \frac{1}{2}(x_{2i-1} - \alpha_{2i-3})^2$ 满足

$$\dot{V}_{2i-1}|_{(x_{2i+1}=\alpha_{2i-1})} = \dot{V}_{2i-3}|_{(x_{2i-1}=\alpha_{2i-3})} - (x_{2i-1} - \alpha_{2i-3})^2 \leq 0,$$

且当 $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{2i-1} \equiv 0$ 时, $\alpha_{2i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2i-1}) \equiv 0$.

当 $k=i+1$ 时, 对增加两维的子系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, x_5), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2i+1} = x_{2i+3} + f_{2i+1}(x_1, \dots, x_{2i+1}), \end{cases} \quad (3)$$

令 $z_{2i-1} = x_{2i+1} - \alpha_{2i-1}$, 取 $V_{2i+1}(x_1, x_2, \dots, x_{2i+1}) = V_{2i-1} + \frac{1}{2}z_{2i-1}^2$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i+1} &= \frac{\partial V_{2i-1}}{\partial(x_1, \dots, x_{2i-1})} \cdot [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{2i-1}]^T + \frac{\partial V_{2i-1}}{\partial x_{2i-1}} \cdot \dot{x}_{2i-1} + z_{2i-1} \cdot \dot{z}_{2i-1} = \\ &\cdot \dot{V}_{2i-1}|_{(x_{2i+1}=\alpha_{2i-1})} + z_{2i-1} \cdot \left(\frac{\partial V_{2i-1}}{\partial x_{2i-1}} + x_{2i+3} + f_{2i+1}(x_1, \dots, x_{2i+1}) - \dot{a}_{2i-1} \right). \end{aligned}$$

所以当取 $x_{2i+3} = \alpha_{2i+1}(x_1, \dots, x_{2i+1}) = -\frac{\partial V_{2i-1}}{\partial x_{2i-1}} - f_{2i+1}(x_1, \dots, x_{2i+1}) + \dot{a}_{2i-1} - z_{2i-1}$ 时, 有

$\dot{V}_{2i+1} = \dot{V}_{2i-1}|_{(x_{2i+1}=\alpha_{2i-1})} - z_{2i-1}^2$. 注意在 $\dot{a}_{2i-1}(x_1, \dots, x_{2i-1})$ 中只含有变量 $(x_1, \dots, x_{2i-1}, x_{2i}, x_{2i+1})$, 故 $\dot{V}_{2i+1}|_{(x_{2i+3}=\alpha_{2i+1})} = \dot{V}_{2i-1}|_{(x_{2i+1}=\alpha_{2i-1})} - (x_{2i+1} - \alpha_{2i-1})^2 \leq 0$.

当 $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{2i+1} \equiv 0$ 时, 易知 $f_{2i+1} \equiv z_{2i-1} \equiv \dot{a}_{2i-1} \equiv 0$, 且 $\frac{\partial V_{2i-1}}{\partial x_{2i-1}} = x_{2i-1} - \alpha_{2i-3} \equiv 0$,

所以 $\alpha_{2i+1}(x_1, \dots, x_{2i+1}) \equiv 0$.

综上所述, 用数学归纳法证明了如下命题.

命题 1. 存在 $u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_{2n-1}) = -\frac{\partial V_{2n-3}}{\partial x_{2n-3}} - f_{2n-1}(x_1, \dots, x_{2n-1}) + \dot{a}_{2n-3} - z_{2n-3}$ 使得子系统 $(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1})$ 关于半正定函数

$$V_{2n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_3 - \alpha_1)^2 + \dots + \frac{1}{2}(x_{2n-1} - \alpha_{2n-3})^2$$

满足 $\dot{V}_{2n-1} \Big|_{(u_1=\varphi_1)} = -x_1^2 - (x_3 - \alpha_1)^2 - \dots - (x_{2n-1} - \alpha_{2n-3})^2 \leq 0$, 而且当 $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{2i-3} \equiv 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时, $\alpha_{2i-3} \equiv 0$.

2.2 u_2 的设计

步骤 1. 设 x_4 为 $\{x_1, x_2\}$ 子系统的“虚拟控制”, 取 $x_4 = \alpha_2(x_1, x_2, x_3, x_5) = -f_2(x_1, x_2, x_3, x_5) - x_2$, 则存在半正定函数 $V_2(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$, 有 $\dot{V}_2(x_2) \Big|_{(x_4=\alpha_2)} = -x_2^2$, 且当 $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_5 \equiv 0$ 时, $\alpha_2(x_1, x_2, x_3, x_5) \equiv 0$.

步骤 2. 设 x_4 为 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 子系统的“虚拟控制”, 令 $z_2 = x_4 - \alpha_2(x_1, x_2, x_3, x_5)$, 取半正定函数

$$V_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}z_2^2,$$

则有 $\dot{V}_4 = -x_2^2 + x_2 \cdot z_2 + z_2 \cdot \dot{z}_2 = -x_2^2 + z_2(x_2 + x_6 + f_4(x_1, x_2, \dots, x_5, x_7) - \dot{\alpha}_2)$. 若取 $x_6 = \alpha_4(x_1, x_2, \dots, x_5, x_7) = -z_2 - x_2 - f_4(x_1, x_2, \dots, x_5, x_7) + \dot{\alpha}_2$, 则 $\dot{V}_4 = -x_2^2 - z_2^2$.

显然, 当 $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_5 \equiv x_7 \equiv 0$ 时, 有 $z_2 \equiv x_2 \equiv f_4 \equiv \dot{\alpha}_2 \equiv 0$, 所以 $\alpha_4 \equiv 0$.

步骤 k. 假设当 $k=1, 2, \dots, i$ 时, 子系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, x_5), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2i} = x_{2i+2} + f_{2i}(x_1, \dots, x_{2i+1}, x_{2i+3}) \end{cases} \quad (4)$$

存在“虚拟控制” $x_{2i+2} = \alpha_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_{2i+1}, x_{2i+3})$, 使得子系统(4)关于半正定函数 $V_{2i}(x_1, \dots, x_{2i+1}) = V_{2i-2} + \frac{1}{2}(x_{2i} - \alpha_{2i-2})^2$ 满足

$$\dot{V}_{2i} \Big|_{(x_{2i+2}=\alpha_{2i})} = \dot{V}_{2i-2} \Big|_{(x_{2i}=\alpha_{2i-2})} - (x_{2i} - \alpha_{2i-2})^2 \leq 0,$$

而且当 $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{2i+1} \equiv x_{2i+3} \equiv 0$ 时, $\alpha_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_{2i+1}, x_{2i+3}) \equiv 0$.

当 $k=i+1$ 时, 对于增加两维的子系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, x_5), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2i+2} = x_{2i+4} + f_{2i+2}(x_1, \dots, x_{2i+3}, x_{2i+5}), \end{cases} \quad (5)$$

令 $z_{2i} = x_{2i+2} - \alpha_{2i}$, 取 $V_{2i+2}(x_1, x_2, \dots, x_{2i+3}) = V_{2i} + \frac{1}{2}z_{2i}^2$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i+2} &= \frac{\partial V_{2i}}{\partial(x_1, \dots, x_{2i-1}, x_{2i+1})} \cdot [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{2i-1}, \dot{x}_{2i+1}]^T + \frac{\partial V_{2i}}{\partial x_{2i}} \cdot \dot{x}_{2i} + z_{2i} \cdot \dot{z}_{2i} = \\ &\dot{V}_{2i} \Big|_{(x_{2i+2}=\alpha_{2i})} + z_{2i} \cdot \left(\frac{\partial V_{2i}}{\partial x_{2i}} + x_{2i+4} + f_{2i+2}(x_1, \dots, x_{2i+3}, x_{2i+5}) - \dot{\alpha}_{2i} \right). \end{aligned}$$

所以, 若取

$$x_{2i+4} = \alpha_{2i+2}(x_1, \dots, x_{2i+3}, x_{2i+5}) = -\frac{\partial V_{2i}}{\partial x_{2i}} - f_{2i+2}(x_1, \dots, x_{2i+3}, x_{2i+5}) + \dot{\alpha}_{2i} - z_{2i},$$

则 $\dot{V}_{2i+2} = \dot{V}_{2i} \Big|_{(x_{2i+2}=\alpha_{2i})} - z_{2i}^2$. 注意在 $\dot{\alpha}_{2i}(x_1, \dots, x_{2i+1}, x_{2i+3})$ 中只含有变量 $(x_1, \dots, x_{2i+3}, x_{2i+5})$, 故 $\dot{V}_{2i+2} \Big|_{(x_{2i+4}=\alpha_{2i+2})} = \dot{V}_{2i} \Big|_{(x_{2i+2}=\alpha_{2i})} - (x_{2i+2} - \alpha_{2i})^2 \leq 0$.

当 $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{2i+3} \equiv x_{2i+5} \equiv 0$ 时, 易知 $f_{2i+2} \equiv z_{2i} \equiv \dot{\alpha}_{2i} \equiv 0$, 且 $\frac{\partial V_{2i}}{\partial x_{2i}} = x_{2i} - \alpha_{2i-2} \equiv 0$, 所以 $\alpha_{2i+2}(x_1, \dots, x_{2i+3}, x_{2i+5}) \equiv 0$.

综上所述, 用数学归纳法证明如下命题.

命题 2. 存在 $u_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_{2n}) = -\frac{\partial V_{2n-2}}{\partial x_{2n-2}} - f_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) + \dot{\alpha}_{2n-2} - z_{2n-2}$ 使得系统 $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$, 关于半正定函数

$$V_{2n}(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_4 - \alpha_2)^2 + \dots + \frac{1}{2}(x_{2n} - \alpha_{2n-2})^2$$

满足 $\dot{V}_{2n}|_{(u_2=\varphi_2)} = -x_2^2 - (x_4 - \alpha_2)^2 - \dots - (x_{2n} - \alpha_{2n-2})^2 \leq 0$, 而且当 $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{2i-1} \equiv x_{2i+1} \equiv 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时, $\alpha_{2i-2} \equiv 0$.

至此, 可证明本文的主要结论.

定理 1. 对于交叉严格反馈系统(1), 必存在控制 $u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_{2n-1}), u_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_{2n})$ 使得系统全局渐近稳定.

证明. 取 Lyapounv 函数为

$$V = V_{2n-1} + V_{2n} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \alpha_1)^2 + (x_4 - \alpha_2)^2 + \dots + (x_{2n} - \alpha_{2n-2})^2) \geq 0, \quad (6)$$

则由命题 1 和命题 2 的证明可知, 存在控制 $u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_{2n-1}), u_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_{2n})$, 使得

$$\dot{V} = \dot{V}_{2n-1}|_{u_1=\varphi_1} + \dot{V}_{2n}|_{u_2=\varphi_2} = -(x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \alpha_1)^2 + \dots + (x_{2n} - \alpha_{2n-2})^2) \leq 0. \quad (7)$$

根据文献[3]中定理(2.24), 当系统(1)在 $\{x|V(x)=0\}$ 的最大正不变集(记为 Z)上渐近稳定时, 系统(1)关于平衡点 $x=0$ 稳定. 由正不变集定义知, 在 Z 上有 $V(x) \equiv 0$, 即 $x_1 \equiv x_2 \equiv 0, x_3 - \alpha_1(x_1) \equiv 0, x_4 - \alpha_2(x_1, x_2, x_3, x_5) \equiv 0, \dots; x_{2n} - \alpha_{2n-2} \equiv 0$. 根据命题 1 知, 当 $x_1 \equiv 0$ 时, $x_3 \equiv \alpha_1(x_1) \equiv 0$, 从而由 $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv 0$ 又可以得到 $x_5 \equiv \alpha_3(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$; 再根据命题 2 可知, 当 $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv x_5 \equiv 0$ 时, $x_4 \equiv \alpha_2(x_1, x_2, x_3, x_5) \equiv 0$. 依此类推, 当 $V(x) \equiv 0$ 时, $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})^T \equiv 0$. 所以 $\{x|V(x) \equiv 0\}$ 的最大正不变集 Z 就是系统平衡点 $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})^T = 0$, 故系统(1)关于 $x=0$ 稳定. 再根据 LaSalle 不变集原理^[3], 系统(1)的运动收敛到 $\{\dot{V}(x)=0\}$ 的最大不变集(记为 E), 在 E 上 $\dot{V}(x) \equiv 0$. 由式(6)和(7)易知 $E=Z=\{x=0\}$, 所以系统(1)关于 $x=0$ 渐近稳定. 又因为 Lyapounv 函数 $V(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ 径向无界, 所以系统(1)全局渐近稳定于原点.

注 1. 在命题 1 和 2 的证明过程中, 实际上给出了交叉严格反馈系统(1)控制器设计方法及 Lyapounv 函数的构造方法, 在控制器设计过程中, 我们分别对奇数阶状态和偶数阶状态采用 backstepping 算法反向递推. 利用 u_1 控制状态 x_{2n-1} 使其收敛到某一流形 α_{2n-3} , 再利用 x_{2n-1} 控制 x_{2n-3} 收敛到某一流形 α_{2n-5} , 这样一直递推下去. u_2 的控制过程也一样, 先控制 $x_{2n} \rightarrow \alpha_{2n-2}$, 再利用 x_{2n} 控制 $x_{2n-2} \rightarrow \alpha_{2n-4}$, 反复迭代直至 $x_2 \rightarrow 0$. 所以 u_1 和 u_2 分别控制两组递阶的流形, 根据定理 1 证明知, 系统的运动最终收敛到这两组递阶流形的交集上, 也就是平衡点 $x_e=0$.

注 2. 系统(1)的形式还可以进一步拓宽. 在系统(1)中, 奇数阶和偶数阶子系统的阶数不一定要相同. 也就是说, 控制器 u 的作用点可以不受限制出现在最后两个状态方程中.

这种形式的系统可用下式描述

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = x_4 + f_2(x_1, x_2, x_3, x_5), \\ \vdots \\ \dot{x}_{2i-1} = u_1 + f_{2i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2i-1}), \\ \dot{x}_{2i} = x_{2i+1} + f_{2i}(x_1, x_2, \dots, x_{2i}), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = u_2 + f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (8)$$

将上式与(1)式对比可知,在上式中 u_1 的作用点上移. 如果将 x_{2i+1} 视为虚拟控制 u'_2 , 则系统(8)相当于在一个交叉严格反馈系统 (x_1, \dots, x_{2i}) 上再级联一个一般的严格反馈系统 (x_{2i+1}, \dots, x_n) . 事实上,如果将子系统 (x_1, \dots, x_{2i}) 视为整个系统的零动态,则系统(8)也可看成是一个严格反馈系统. 但此系统的零动态需要通过设计实际控制 u_1 和虚拟控制 x_{2i+1} 来镇定. 对于系统(8)采用定理 1 证明中的方法,也可以递归地设计出控制器 u_1 和 u_2 , 使整个系统全局渐近稳定.

3 仿真实例

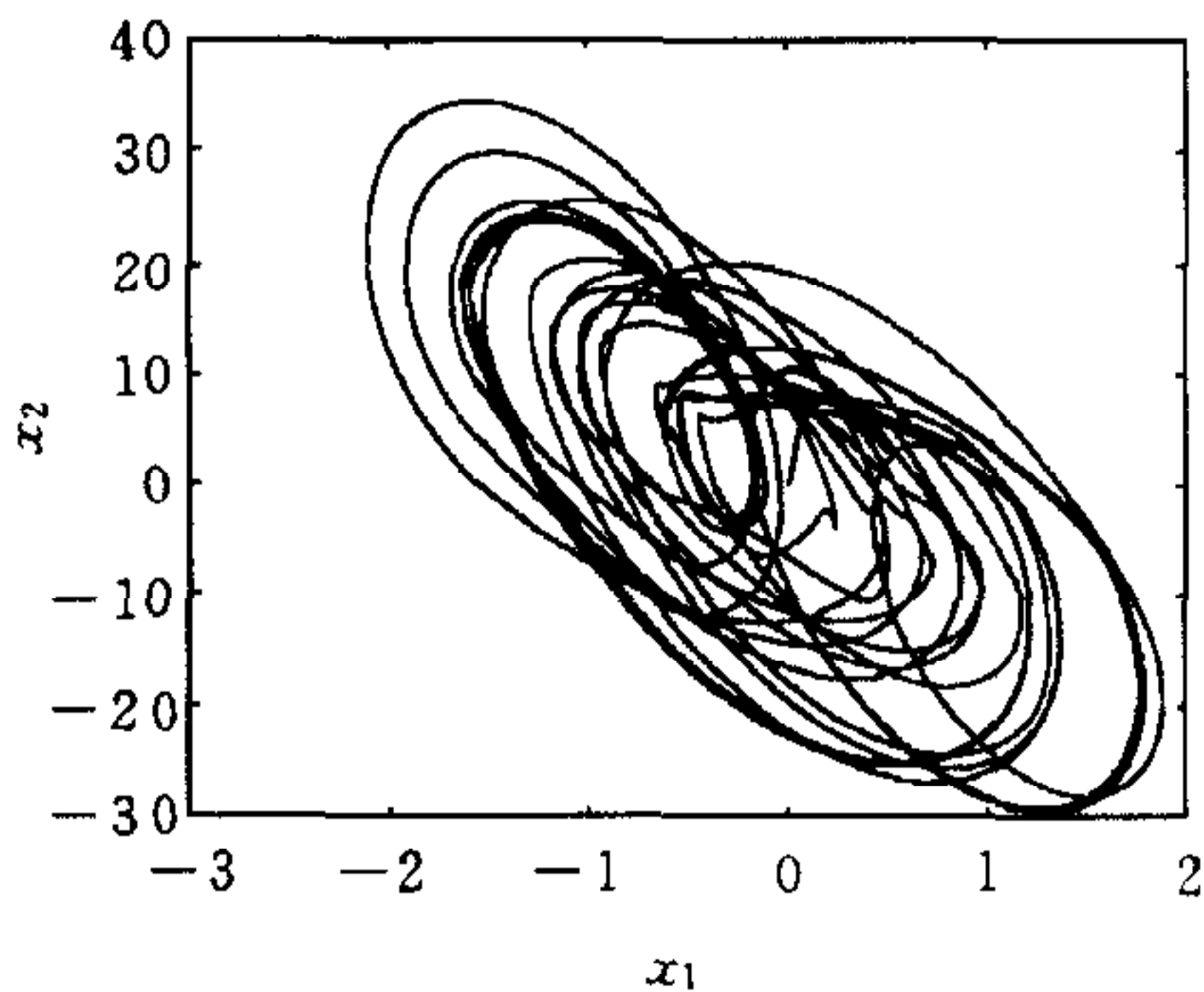


图 1 超混沌系统的相轨迹 (x_1, x_2)

我们选取文献[6]中的超混沌系统作为仿真对象. 系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_3, \\ \dot{x}_2 = -20(x_1 + x_4), \\ \dot{x}_3 = 2(g(x_2 - 11x_3) - x_1) + u_1, \\ \dot{x}_4 = 1.5x_2 - 15x_3 + u_2, \end{cases}$$

其中 $g(x) = 3x + 1.6(|x-1| - |x+1|)$. 根据文献[6], 该系统在控制信号 $u_1 = u_2 = 0$ 时, 四个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 0.24, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -53.8$. 有两个 Lyapunov 指数大于零, 因此是超混沌系统. 状态轨迹如图 1 所示.

易见该系统满足(1)式, 属于交叉严格反馈系统. 但该系统不满足严格反馈条件, 无法采用一般的 backstepping 进行设计. 下面采用本文所提的方法对其进行镇定. 按照定理 1 中的设计方法可得到控制器 $u_1 = -x_1 - 2x_3 - 2g(x_2 - 11x_3) - z_1, u_2 = -21x_1 + 18.5x_2 + 14x_3 - 20x_4 - z_2$, 其中 $z_1 = x_3 + 2x_1, z_2 = x_4 + x_1 - x_2$. 仿真结果见图 2.

4 结论

Backstepping 是设计非线性控制系统的一种行之有效的结构化方法, 但由于该方法对系统结构的严格限制, 其应用范围受到很大限制. 本文针对非线性交叉严格反馈(cross strict feedback)系统, 首次提出交叉回退(cross backstepping)设计方法, 并证明了整个控制

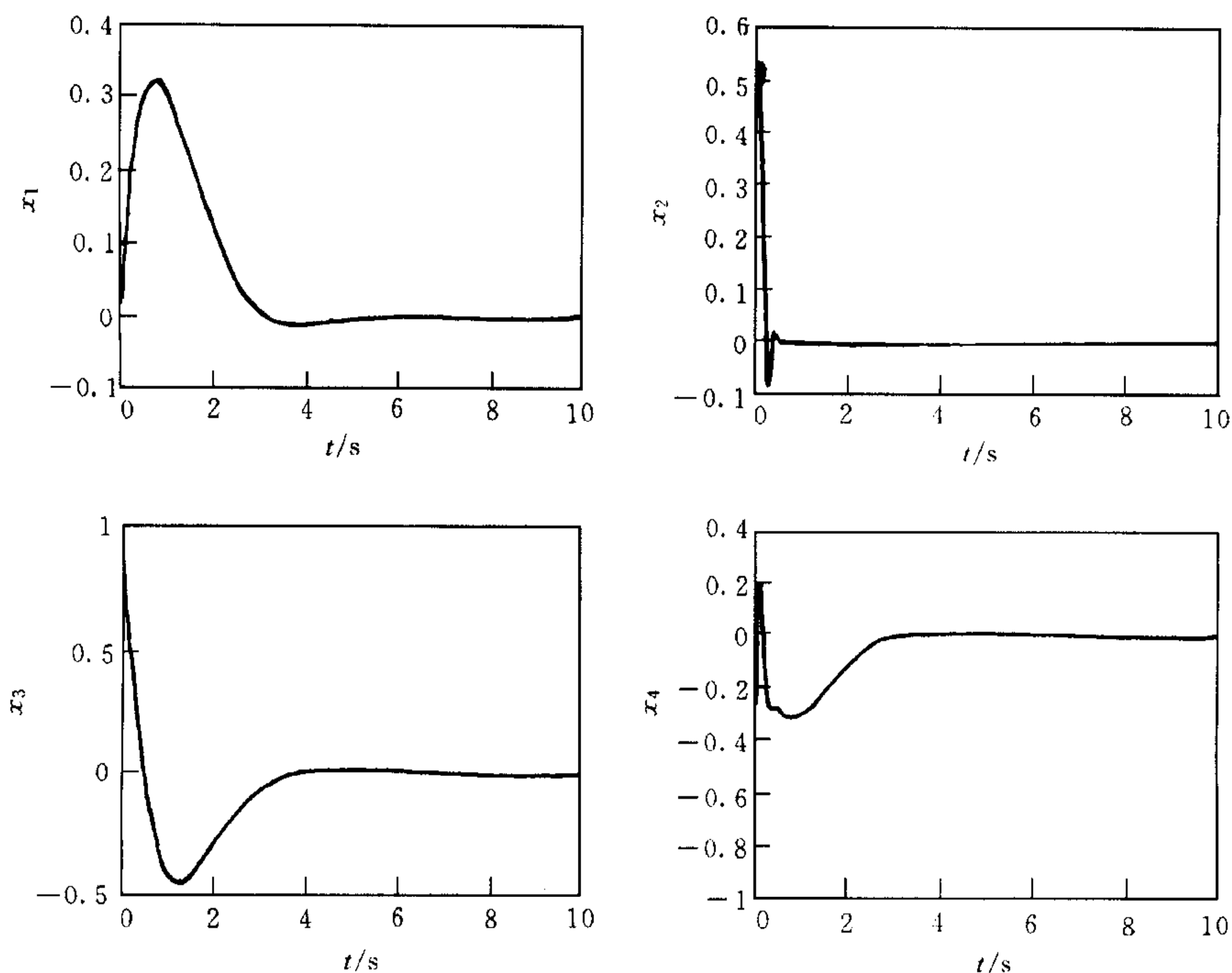


图 2 受控超混沌系统的状态响应

系统的全局稳定性,仿真算例验证了方法的正确性.最后需要指出,系统(1)还可以推广到多控制形式,采用类似本文定理证明中的方法也可得出相应的系统形式和控制律设计方法.

参 考 文 献

- 1 Kolesnikov A A. Analytical construction of nonlinear aggregated regulators for a given set of invariant manifolds, (in Russian) *Electromechanika*, Part I, 1987; **12**(3), 100~109, Part II, 1987, **12**(5):58~66
- 2 Saberi A, Kokotovic P V Sussmam H J. Global stabilization of partially linear composite systems, *SIAM J. Control Opt.*, 1990, 28: 1491~1503
- 3 Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*, New York; Wiley, 1995
- 4 Freeman R, Krstic M, Kokotovic P V. Robustness of adaptive nonlinear control to bounded uncertainties. In: Proc. of 13th IFAC world congress, San Francisco, 1996, 329~334
- 5 程代展,洪奕光,秦化淑. Backstepping Forms of Multi-Input Nonlinear System. *控制理论与应用*, 1998, **15**(6)
- 6 Matsumoto T, Chua L O, Kobayashi K *et al.* Hyperchaos: Laboratory experiment and numerical confirmation, *IEEE Trans. On Circuits and Systems*, **33**(11):1986,1143~1147

宫 琪 1972 出生. 1996 年毕业于大连理工大学自动化系, 获工学学士学位. 1999 年在东南大学自动控制系获工学硕士学位. 现在美国 Case Western Reserve 大学攻读博士学位.

田玉平 1964 年出生. 1986 年毕业于清华大学自动化系, 获工学学士学位. 1991 年于莫斯科动力学院获自动控制专业哲学博士学位. 1996 年获俄罗斯技术科学博士学位. 现为东南大学自动控制系教授, 博士生导师. 目前研究兴趣为复杂系统控制理论及应用, 鲁棒控制, 混沌控制, 机器人控制等.