第 26 卷　第 4 期
2000 年 7 月

自　动　化　学　报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 4
Jul., 2000

M-独立条件下 LMS 算法的稳定区域

王　远
（北京信息工程学院计算机信息系统系　北京　100101）

解学军
（曲阜师范大学自动化所　山东　273165）

摘　要　对于著名的最小均方算法，当算法中的输入数据满足 M-独立条件时，首先得到了一个使得最小均方算法指数稳定的充分条件，然后进一步给出了一个确切的步长的取值区域，证明在此区域内，最小均方算法的估计误差是有界的.

关键词　LMS 算法，M-独立，平稳，非退化，L_p-稳定.

THE STABILITY RANGE OF THE LMS ALGORITHM UNDER M-INDEPENDENT CONDITION

WANG Yuan
(*Beijing Information Technology Institute*, *Beijing*　100101)
XIE Xuejun
(*Institute of Automation*, *Qufu Normal University*, *Qufu*　273165)

Abstract　When the input data satisfies the M-independent condition, we first obtain a sufficient condition to ensure the exponential stability of the well-known least mean squares algorithm. Then, we give an exact stability range of the step size and prove that in this range the estimation error is bounded.

Key words　LMS algorithm, M-independent, stationary, nondegeneration, L_p-stable.

1　引言

设观测方程

$$y_k = \varphi_k^{\mathrm{T}} \theta_k + v_k, \tag{1}$$

参数变化

$$\theta_{k+1} = \theta_k + w_{k+1}, \tag{2}$$

其中 θ_k 是未知时变参数，φ_k 是 k 时刻 d 维输入向量，y_k 是 k 时刻的观测值，w_k，v_k 是独立的噪声序列. 对于由(1)，(2)式所描述的系统，著名的最小均方(LMS)算法由下式给出：

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \mu \varphi_k (y_k - \varphi_k^{\mathrm{T}} \hat{\theta}_k), \tag{3}$$

收稿日期　1999-01-15　　收修改稿日期　2000-01-12

其中 μ 是步长，它的选取对算法的稳定性及性能是至关重要的，许多作者在此方面做了重要的工作. 早期的工作可追溯到 Widrow 和 Stearns[1]. 文献[2]得到了使得均方误差(MSE)有界的充分必要条件

$$0<\mu<\frac{2}{3\mathrm{tr}(R)}, \tag{4}$$

其中 R 是输入数据的协方差阵，tr(・)表示矩阵的迹. 文献[3]进一步得到一类时变步长 LMS 算法的 MSE 收敛的充分条件. 但文献[2,3]都是基于输入数据平稳，独立，高斯白噪声的假设条件得出的. 当 φ_k 不满足独立性假设条件时，即使是两步独立情形，(4)式所给出的范围也不能保证 LMS 算法的稳定性. 下面的例子说明了这一点.

例 1. 考虑一维情形，设真实参数非时变($\theta_k \equiv \theta$)，$\varphi_k=\varepsilon_k\varepsilon_{k-1}$，其中 ε_k 是 i. i. d 随机变量，$\varepsilon_k \sim N(0,1)$，那么 $R=\mathrm{E}(\varphi_k^2)=1$. 我们将说明，存在 $\mu_0<\frac{2}{3\mathrm{tr}R}=\frac{2}{3}$，使得 $\mathrm{E}\tilde{\theta}_k^2 \to \infty (k\to\infty)$，其中，估计误差

$$\tilde{\theta}_k=\theta_k-\hat{\theta}_k. \tag{5}$$

上述例子说明，当 φ_k 不满足独立性假设条件时，文献[2]所给出的使得 LMS 算法稳定的 μ 值范围将不再适用，因此有必要研究基于输入数据 M-独立过程 LMS 算法的稳定性问题. M-独立过程是一类比独立过程更具实际意义的信号过程[4].

Macchi[4]在输入数据 M-独立条件下，得到了 LMS 算法稳定的条件，但没有指出 μ 的具体范围. 更一般的关于算法稳定性的充分必要条件由 Guo 等[5]得到. 进一步，当 μ 很小时，文献[5]还得到了 μ 的最优选取公式，但是 μ 的最大容许稳定区域在文[5]中仍没给出.

本文考虑输入数据 M-独立时，LMS 算法稳定性问题. 首先给出了一个使得 LMS 算法估计误差有界的充分条件，然后进一步给出一个易于计算的 μ 的取值区域. 就作者所知，目前在文献中针对一般 M-独立情形给出具体的步长 μ 值选取的界限尚属首次.

2 主要结果

一个矩阵 X 的范数定义为它的最大奇异值，即 $\|X\| \triangleq \{\lambda_{\max}(XX^{\mathrm{T}})\}^{1/2}$.

定义 2.1. 若在基本概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一个随机矩阵(或变量)序列$\{A_k,k\geqslant 0\}$满足$\sup\limits_{k\geqslant 0}\|A_k\|^p<\infty$，则称该序列是 L_p-稳定的($p>0$).

我们用 $\|A_k\|_p \triangleq \{\mathrm{E}\|A_k\|^p\}^{1/p}$来表示 A_k 的 L_p-范数.

定义 2.2. 设 ξ 是 d 维随机向量，A^d 表示全体 d 维向量构成的线性空间(或仿射空间). $V\subset A^d$ 是 A^d 的任一维数小于 d 的真子空间. 若 $P(\xi\in V)=0$，则 ξ 称作非退化的.

注 1. 若 ξ 的密度函数存在，则 ξ 必为非退化的.

现引入本文中用到的三个基本假设：

A1) $\{\varphi_k,k\geqslant 1\}$是 M-独立过程，即当$|i-j|\geqslant M$ 时，φ_i 与 φ_j 独立；并且$\{\varphi_k,k\geqslant 1\}$平稳，非退化.

A2) 存在常数 $T>1$，使得 $\|\varphi_1\|_{8ph}<T$，其中 $h\triangleq Md$，d 是 φ_k 的维数.

A3) $\sup\limits_k \mathrm{E}[\|w_{k+1}\|^{2p}+\|v_k\|^{4p}]<\infty$，$\mathrm{E}\|\theta_0\|^{2p}<\infty$.

定理 2.1. 在条件 A1),A2)和 A3)下,设 a 是如下关于 μ 的方程

$$\mathrm{E}\left\|\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\right\|^{4p}=1 \tag{6}$$

的最小正根.那么当 $0<\mu<a$ 时,由 LMS 算法所产生的估计误差 $\tilde{\theta}_k$ 是 L_p-稳定的.

引理 2.1. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_d$ 是 d 维独立随机向量序列,若 $\xi_i(i=1,2,\cdots,d)$ 是非退化的,则必有 $\mathrm{E}\left[\lambda_{\min}\left(\sum_{i=1}^{d}\xi_i\xi_i^{\mathrm{T}}\right)\right]>0$,其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示矩阵的最小特征值.

证明略.

引理 2.2. 设 $\{\varphi_k,k\geqslant 1\}$ 是 d 维 M-独立随机向量序列,φ_k 非退化,则对于任意的 $i>0$,$\mathrm{E}\left[\lambda_{\min}\left(\sum_{j=ih+1}^{(i+1)h}\varphi_j\varphi_j^{\mathrm{T}}\right)\right]>0$,其中 h 由条件 $A2$)所定义.

证明略.

定理 2.1 的证明:由(1),(3)和(5)式得

$$\tilde{\theta}_{k+1}=(I-\mu\varphi_k\varphi_k^{\mathrm{T}})\tilde{\theta}_k+\Delta_{k+1}, \tag{7}$$

其中 $\Delta_{k+1}\triangleq w_{k+1}-\mu\varphi_k v_k$. 由(7)递推,得

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{k+1}&=\prod_{i=0}^{k}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\tilde{\theta}_0+\sum_{i=1}^{k+1}\prod_{j=i}^{k}(I-\mu\varphi_j\varphi_j^{\mathrm{T}})\Delta_i\\&=U_{k,0}\tilde{\theta}_0+\sum_{i=1}^{k+1}U_{k,i}\Delta_i,\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $U_{k,i}\triangleq\prod_{j=i}^{k}(I-\mu\varphi_j\varphi_j^{\mathrm{T}}),i\leqslant k$; $U_{i,j}=I$, $i<j$. 因此,由(8)式及 Schwartz 不等式可得

$$\|\tilde{\theta}_{k+1}\|_p\leqslant\|U_{k,0}\|_{2p}\|\tilde{\theta}_0\|_{2p}+\sum_{i=1}^{k+1}\|U_{k,i}\|_{2p}\|\Delta_i\|_{2p}. \tag{9}$$

设 $s=[\frac{k}{h}],t=[\frac{i}{h}]+1$,其中$[\cdot]$表示一个数的整数部分. 注意到对于 d 阶方阵 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, $\|A_1A_2\cdots A_n\|\leqslant d\|A_1\|\|A_2\|\cdots\|A_n\|$,并根据条件 A1),A2)及 Schwartz 不等式得

$$\begin{aligned}\|U_{k,i}\|_{2p}=&\left\|U_{k,sh+1}\left[\prod_{j=t}^{s-1}U_{(j+1)h,jh+1}\right]U_{th,i}\right\|_{2p}\leqslant\\&d\|U_{k,sh+1}\|_{4p}\prod_{j=t}^{s-1}\|U_{(j+1)h,jh+1}\|_{4p}\|U_{th,i}\|_{4p}=\\&O(1)\cdot\prod_{j=t}^{s-1}\|U_{(j+1)h,jh+1}\|_{4p}.\end{aligned} \tag{10}$$

现在说明 a 的存在性. 设 $f(\mu)=\mathrm{E}\|\prod_{j=1}^{h}(I-\mu\varphi_j\varphi_j^{\mathrm{T}})\|^{4p}-1$,则显然有 $f(0)=0$,并且

$$\begin{aligned}f(\mu)&=\mathrm{E}\|\prod_{j=1}^{h}(I-\mu\varphi_j\varphi_j^{\mathrm{T}})\|^{4p}-1\\&=\mathrm{E}\left\|I+\sum_{i=1}^{h}\mu^iF_i\right\|^{4p}-1.\end{aligned} \tag{11}$$

这里 $F_i(i\geqslant 0)$ 由下式给出

$$\begin{cases} F_0 = I, \\ F_1 = -\sum_{i=1}^{h} \varphi_i \varphi_i^{\mathrm{T}}, \\ F_i = (-1)^i \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant h} \varphi_{j_1} \varphi_{j_1}^{\mathrm{T}} \cdots \varphi_{j_i} \varphi_{j_i}^{\mathrm{T}}, \quad 2 \leqslant i \leqslant h, \\ F_i = 0, \quad i > h. \end{cases} \tag{12}$$

由(11)及条件 A2)

$$\begin{aligned} f(\mu) \leqslant 1 - 4p\mu \mathrm{E}\Big[\lambda_{\min}\Big(\sum_{i=1}^{h} \varphi_i \varphi_i^{\mathrm{T}}\Big)\Big] + O(\mu^2) - 1 = \\ -4p\mu \mathrm{E}\Big[\lambda_{\min}\Big(\sum_{i=1}^{h} \varphi_i \varphi_i^{\mathrm{T}}\Big)\Big] + O(\mu^2) \triangleq g(\mu), \end{aligned} \tag{13}$$

则 $g(0)=0$,并且由引理 2.2,$g'(0)=-4p\mathrm{E}\Big[\lambda_{\min}\Big(\sum_{i=1}^{h}\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}\Big)\Big]<0$,因此 $g(\mu)$ 在 $\mu=0$ 处单调递减. 而 $g(u)\to\infty(\mu\to\infty)$ 显然成立. 因此,存在 $\mu_0>0$,使得 $g(\mu_0)<0$. 对于这个 $\mu_0>0$,$f(\mu_0)\leqslant g(\mu_0)<0$. 另一方面,令 $i_0=\max\{1\leqslant i\leqslant h, \|F_i\|_{4p}>0\}$,则由引理 2.2,$i_0\geqslant 1$. 根据(11)式及 $\Big\|I+\sum_{i=1}^{h}\mu^i F_i\Big\|\geqslant \mu^{i_0}\|F_{i_0}\|-\sum_{i<i_0}\mu^i\|F_i\|$,可证 $f(\mu)\to\infty(\mu\to\infty)$. 所以在 $(0,+\infty)$ 上,方程 $f(\mu)=0$ 有解,这就说明了 a 的存在性.

根据 a 的最小性,$\forall\ 0<\mu<a$,$\rho\triangleq\mathrm{E}\Big\|\prod_{j=1}^{h}(I-\mu\varphi_j\varphi_j^{\mathrm{T}})\Big\|^{4p}<1$. 再由(10)式得 $\|U_{k,t}\|_{2p} \leqslant O(1)\prod_{j=t}^{s-1}\sqrt[4p]{\rho}=O(1)\rho^{\frac{s-t}{4p}}=O(1)\bar{\rho}^{k-t}$,其中,$\bar{\rho}\triangleq\rho^{\frac{s-t}{4ph}}$. 所以由(9)式及条件 A3),$\|\tilde{\theta}_{k+1}\|_p\leqslant O(1)\bar{\rho}^k+\sum_{i=1}^{k+1}\bar{\rho}^{k-i}O(1)=O(1)$. 结论成立.

3 μ 值的选取

在上一节中,我们给出了一个使得 LMS 算法稳定的充分条件,其中 μ 的选取是由一个关于 μ 的非线性方程所确定的,不易直接求得. 本节里,我们将进一步给出一个 μ 的取值区域的"显式"表达.

定理 3.1. 在条件 A1),A2)和 A3)下,若 $0<\mu<\min\{\bar{\mu}_p,1\}$,其中

$$\bar{\mu}_p = \frac{4p\mathrm{E}\Big[\lambda_{\min}\Big(\sum_{i=1}^{h}\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}\Big)\Big]}{2p(h+1)TC_{2h}^{h} + T\sum_{r=2}^{2p}C_{2p}^{r}(h+1)^{2r-1}\sum_{s=0}^{h}(C_h^s)^{2r}}, \tag{14}$$

那么 LMS 算法所产生的估计误差 $\tilde{\theta}_k$ 是 L_p-稳定的.

证明. 设

$$\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}) = I + \sum_{i=1}^{h}\mu^i F_i, \tag{15}$$

其中 $F_i(i\geqslant 0)$ 由(12)式所定义. 注意到对一般的矩阵 X,$\|X\|^{2k}=\|XX^{\mathrm{T}}\|^k$ 及(15)式

$$\left\|\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\right\|^{4p}=\left\|\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\Big[\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\Big]^{\mathrm{T}}\right\|^{2p}=$$
$$\left\|\Big(I+\sum_{i=1}^{h}\mu^iF_i\Big)\Big(I+\sum_{i=1}^{h}\mu^iF_i^{\mathrm{T}}\Big)\right\|^{2p}=$$
$$\left\|I+\sum_{i=1}^{h}\mu^i\sum_{s=0}^{i}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}+\sum_{i=h+1}^{2h}\mu^i\sum_{s=i-h}^{h}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\right\|^{2p}=$$
$$\left\|I+\sum_{i=1}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\right\|^{2p}\triangleq$$
$$\|I+A\|^{2p},$$

其中 $A\triangleq\sum_{i=1}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}$. 因为$(I+A)$是对称阵，$\|I+A\|^{2p}=\|(I+A)^{2p}\|$，并利用$(I+A)^{2p}=I+\sum_{r=1}^{2p}C_{2p}^{r}A^r$，得 $\|I+A\|^{2p}=\|I+C_{2p}^1A+\sum_{r=2}^{2p}C_{2p}^rA^r\|$，即

$$\begin{aligned}\left\|\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\right\|^{4p}&=\Big\|I+C_{2p}^1\Big(\sum_{i=1}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big)+\\&\sum_{r=2}^{2p}C_{2p}^r\Big(\sum_{i=1}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big)^r\Big\|=\\&\Big\|I+C_{2p}^1\mu(F_1+F_1^{\mathrm{T}})+C_{2p}^1\sum_{i=2}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}+\\&\sum_{r=2}^{2p}C_{2p}^r\Big(\sum_{i=1}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big)^r\Big\|.\end{aligned}\tag{16}$$

因为 F_1 是对称阵，由(16)式得

$$\begin{aligned}\left\|\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\right\|^{4p}\leqslant&1-4p\mu\lambda_{\min}\Big(\sum_{i=1}^{h}\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}\Big)+\\&C_{2p}^1\Big\|\sum_{i=2}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|+\\&\sum_{r=2}^{2p}C_{2p}^r\Big\|\sum_{i=1}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|^r.\end{aligned}\tag{17}$$

因为 $\mu<1$，所以

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=2}^{2h}\mu^i\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|\leqslant&\sum_{i=2}^{2h}\mu^i\Big\|\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|\leqslant\\&\mu^2\sum_{i=2}^{2h}\Big\|\sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|=\\&\mu^2\Big[\sum_{i=2}^{h}\Big\|\sum_{s=0}^{i}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|+\sum_{i=h+1}^{2h}\Big\|\sum_{s=i-h}^{h}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|\Big].\end{aligned}\tag{18}$$

根据 $\|AB^{\mathrm{T}}+BA^{\mathrm{T}}\|\leqslant\|A\|^2+\|B\|^2$，易证 $\Big\|\sum_{s=0}^{i}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|\leqslant\sum_{s=0}^{i}\|F_s\|^2$，及 $\Big\|\sum_{s=i-h}^{h}F_sF_{i-s}^{\mathrm{T}}\Big\|\leqslant\sum_{s=i-h}^{h}\|F_s\|^2$，因此，由(18)式得

$$\left\| \sum_{i=2}^{2h} \mu^i \sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}} F_s F_{i-s}^{\mathrm{T}} \right\| \leqslant \mu^2 \Big[\sum_{i=2}^{h} \sum_{s=0}^{i} \| F_s \|^2 + \sum_{i=h+1}^{2h} \sum_{s=i-h}^{h} \| F_s \|^2 \Big] = \\ \mu^2 \Big[\sum_{i=2}^{h} \sum_{s=0}^{i} \| F_s \|^2 + \sum_{i=1}^{h} \sum_{s=i}^{h} \| F_s \|^2 \Big] \leqslant \\ \mu^2 \Big[\sum_{i=1}^{h} \sum_{s=0}^{h} \| F_s \|^2 + \sum_{i=1}^{h} \| F_i \|^2 \Big] \leqslant \\ \mu^2 (h+1) \sum_{s=0}^{h} \| F_s \|^2. \tag{19}$$

用同样的方法可证

$$\left\| \sum_{i=1}^{2h} \mu^i \sum_{s=\max\{0,i-h\}}^{\min\{i,h\}} F_s F_{i-s}^{\mathrm{T}} \right\| \leqslant \mu (h+1) \sum_{s=0}^{h} \| F_s \|^2. \tag{20}$$

把(19),(20)式代入(17)式并对两边取期望,得

$$\mathrm{E} \left\| \prod_{i=1}^{h} (I - \mu \varphi_i \varphi_i^{\mathrm{T}}) \right\|^{4p} \leqslant 1 - 4p\mu \mathrm{E} \Big[\lambda_{\min} \Big(\sum_{i=1}^{h} \varphi_i \varphi_i^{\mathrm{T}} \Big) \Big] + \\ 2p(h+1)\mu^2 \sum_{s=0}^{h} \mathrm{E} \| F_s \|^2 + \\ \sum_{r=2}^{2p} C_{2p}^{r} \mu^r (h+1)^r \mathrm{E} \Big(\sum_{s=0}^{h} \| F_s \|^2 \Big)^r. \tag{21}$$

现在来估计 $\mathrm{E}\| F_s \|^r$. 注意到对于 d 维向量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$

$$\| \xi_1 \xi_1^{\mathrm{T}} \xi_2 \xi_2^{\mathrm{T}} \cdots \xi_n \xi_n^{\mathrm{T}} \| \leqslant \| \xi_1 \|^2 \| \xi_2 \|^2 \cdots \| \xi_n \|^2,$$

并利用 C_r-不等式,得

$$\mathrm{E} \| F_s \|^r = \mathrm{E} \Big[\Big\| \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant h} \varphi_{j_1} \varphi_{j_1}^{\mathrm{T}} \cdots \varphi_{j_s} \varphi_{j_s}^{\mathrm{T}} \Big\|^r \Big] \leqslant \\ \mathrm{E} \Big[\sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant h} \| \varphi_{j_1} \varphi_{j_1}^{\mathrm{T}} \cdots \varphi_{j_s} \varphi_{j_s}^{\mathrm{T}} \| \Big]^r \leqslant \\ \mathrm{E} \Big[\sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant h} \| \varphi_{j_1} \|^2 \cdots \| \varphi_{j_s} \|^2 \Big]^r \leqslant \\ (C_h^s)^{r-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant h} \mathrm{E} [\| \varphi_{j_1} \|^{2r} \cdots \| \varphi_{j_s} \|^{2r}], \tag{22}$$

根据(22)式,Hölder 不等式,φ_k 的平稳性及条件 A2)得

$$\mathrm{E} \| F_s \|^r \leqslant (C_h^s)^{r-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant h} \sqrt[s]{\mathrm{E} \| \varphi_{j_1} \|^{2rs} \cdots \mathrm{E} \| \varphi_{j_s} \|^{2rs}} = \\ (C_h^s)^{r-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_s \leqslant h} \mathrm{E} \| \varphi_1 \|^{2rs} = \\ (C_h^s)^{r-1} C_h^s \mathrm{E} \| \varphi_1 \|^{2rs} \leqslant \\ (C_h^s)^r T, \tag{23}$$

因此

$$\sum_{s=0}^{h} \mathrm{E} \| F_s \|^2 \leqslant \sum_{s=0}^{h} (C_h^s)^2 T = T C_{2h}^{h}, \tag{24}$$

并且

$$\sum_{s=0}^{h}\mathrm{E}\|F_s\|^{2r}\leqslant\sum_{s=0}^{h}(C_h^s)^{2r}T. \tag{25}$$

由 C_r-不等式及(25)式

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big(\sum_{s=0}^{h}\|F_s\|^2\Big)^r\leqslant(h+1)^{r-1}\sum_{s=0}^{h}\mathrm{E}\|F_s\|^{2r}\leqslant \\ (h+1)^{r-1}T\sum_{s=0}^{h}(C_h^s)^{2r},\end{aligned} \tag{26}$$

把式(24),(26)代入式(21),得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\|\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\|^{4p}\leqslant 1-4p\mu\mathrm{E}\Big[\lambda_{\min}\Big(\sum_{i=1}^{h}\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}}\Big)\Big]+ \\ 2p(h+1)\mu^2TC_{2h}^h+\Big[\sum_{r=2}^{2p}C_{2p}^r(h+1)^{2r-1}T\sum_{s=0}^{h}(C_h^s)^{2r}\Big]\mu^2.\end{aligned}$$

因此,若 $\bar{\mu}_p$ 按(14)式所定义,那么当 $0<\mu<\bar{\mu}_p$ 时,$\mathrm{E}\left\|\prod_{i=1}^{h}(I-\mu\varphi_i\varphi_i^{\mathrm{T}})\right\|^{4p}<1$,再由定理 2.1,可得结论成立.

4　结论

本文考虑 M-独立情形下 LMS 算法的稳定性,这比许多文献中要求的输入数据是独立的假定要弱,因而问题更复杂. 定理 2.1 给出了一个使得 LMS 算法稳定的充分条件,这个条件中 μ 的取值区域由一个隐式方程给出. 定理 3.1 把 μ 的取值区域用一个显式表示出来,这个表示虽比较粗糙,但就作者所知尚属首次. 如何改进这一上界及如何减弱 M-独立条件有待进一步研究.

参　考　文　献

1 Widrow B, Stearns S D. Adaptive Signal Processing. New Jersey:Prentice-Hall,1985

2 Feuer A, Weinstein E. Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated Gaussian data. *IEEE Trans. ASSP*, 1985,**33**:222～230

3 Aboulnasr T, Mayyas K. A robust variable step-size LMS-type algorithm:analysis and simulations. *IEEE Trans. Singal Processing*, 1997,**45**:631～639

4 Macchi O. Adaptive Processing:the Least Mean Squares Approach with Applications in Transmission. New York: John Wiley and Sons,1995

5 Guo L, Ljung L, Wang G J. Necessary and sufficient conditions for stability of LMS. *IEEE Trans. Autom. Control*,1997,**42**:761～770

王　远　1972 年生,1999 年于中科院系统科学研究所获博士学位,现任北京信息工程学院计算机信息系统系讲师,研究方向为自适应信号处理.

解学军　1968 年生,1999 年于中科院系统科学研究所获博士学位,现任曲阜师范大学自动化所副教授,研究方向为自适应控制.