第26卷 第3期
2000年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 3
May, 2000

研究简报

保证闭环性能品质的奇异摄动类降阶方法[1)]

张力军* 程 鹏
(北京航空航天大学自动控制系 北京 100083)
(* E-mail: ljzhang@hotmail.com.)

关键词 控制器降阶，奇异摄动降阶法，广义奇异摄动降阶法，均衡截取法，双线性变换.

A CLASS OF SINGULAR PERTURBATION APPROXIMATION METHODS FOR CONTROLLER ORDER REDUCTION WITH GUARANTEED CLOSED LOOP PERFORMANCE

ZHANG Lijun CHENG Peng
(*Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083)

Key words Controller order reduction, singular perturbation approximation, generalized singular perturbation approximation, balanced truncation method, bilinear transform.

1 引言

目前，由于 H_2, H_∞ 和 μ 等理论所设计的控制器阶数较高，迫切需要对其进行降阶. Zhou 等人[1]针对某一类控制系统，提出了保证闭环性能品质的结构均衡截取控制器降阶方法. Do Chang Oh 等人[2]将此方法推广到了奇异摄动降阶方法，它具有低频段误差较小的优点.

本文在 Zhou 等人方法的基础上，利用奇异摄动降阶方法同截取降阶方法的双线性变换关系，用比较简洁的方法证明了 Do Chang Oh 等人的结果. 并进一步运用这种思想，推广得到了保证闭环性能品质控制器降阶的广义奇异摄动方法.

2 保证闭环性能品质的结构均衡截取控制器降阶方法[1]

定理1[1]. 设控制器 $K(s)$ 使得闭环传递函数 $T_{zw}(s)=F_1(G,K)\in RH_\infty$，并且存在 P

1)国家自然科学基金资助项目.
收稿日期 1998-03-27 收修改稿日期 1998-12-03

$=\mathrm{diag}(P_1,P_2)\geqslant 0$和 $Q=\mathrm{diag}(Q_1,Q_2)\geqslant 0$满足

$$\overline{A}P+P\overline{A}'+\overline{B}\overline{B}'\leqslant 0,\tag{1}$$

$$\overline{A}'Q+Q\overline{A}+\overline{C}'\overline{C}\leqslant 0,\tag{2}$$

并进一步假设存在可逆阵 T_1和 T_2,使得

$$T_1P_1T'_1=(T_1^{-1})'Q_1T_1^{-1}=\tilde{\Sigma}=\mathrm{diag}(\gamma_1,\cdots,\gamma_q),\tag{3}$$

$$T_2P_2T'_2=(T_2^{-1})'Q_2T_2^{-1}=\Sigma=\mathrm{diag}(\Sigma_1,\Sigma_2),\tag{4}$$

其中 $\Sigma_1=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r),\Sigma_2=\mathrm{diag}(\sigma_{r+1},\cdots,\sigma_m),\sigma_r>\sigma_{r+1}$.

$$K(s)=\left[\begin{array}{c|c}T_2A_kT_2^{-1} & T_2B_K\\ \hline C_kT_2^{-1} & D_k\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|c}A_{k1} & A_{k2} & B_{k1}\\ A_{k3} & A_{k4} & B_{k2}\\ \hline C_{k1} & C_{k2} & D_k\end{array}\right],\tag{5}$$

这里 $K(s)$系统矩阵分块同 Σ 的分块一致,则降阶的控制器

$\hat{K}(s)=\left[\begin{array}{c|c}A_{k1} & B_{k1}\\ \hline C_{k1} & D_k\end{array}\right]$使得闭环系统 $\hat{T}_{z\omega}(s)=F_1(G(s),\hat{K}(s))$稳定.并且降阶前后闭环系统的误差界为

$$\|T_{z\omega}-\hat{T}_{z\omega}\|_\infty\leqslant 2\sum_{i=r+1}^{m}\sigma_i.\tag{6}$$

将 Σ 分解的维数分配主要由降阶控制器的阶数和 Σ 对角元数值大小的差别决定.

3 保证闭环性能品质的奇异摄动控制器降阶方法

定理2[2]. 在定理1的条件下,则式(5)的奇异摄动降阶控制器

$$\hat{K}(s)=\left[\begin{array}{c|c}\hat{A}_k & \hat{B}_k\\ \hline \hat{C}_k & \hat{D}_k\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}A_{k1}-A_{k2}A_{k4}^{-1}A_{k3} & B_{k1}-A_{k2}A_{k4}^{-1}B_{k2}\\ \hline C_{k1}-C_{k2}A_{k4}^{-1}A_{k3} & D_{k2}-C_{k2}A_{k4}^{-1}B_{k2}\end{array}\right],\tag{7}$$

这里 $K(s)$系统矩阵分块同 Σ 的分块一致.降阶后闭环系统满足

$$\hat{T}_{z\omega}(s)=F_1(G(s),\hat{K}(s))\in RH_\infty.$$

降阶前后闭环系统的误差界 $\|T_{z\omega}-\hat{T}_{z\omega}\|_\infty\leqslant 2\sum_{i=r+1}^{m}\sigma_i$, (8)

并且有

$$\hat{T}_{z\omega}(0)=T_{z\omega}(0).\tag{9}$$

显然,这种方法在低频段误差较小.

这里,利用文献[3]中的引理9.2.2,通过两次双线性变换可比较简洁地证明了定理2.首先,通过变换得 $\tilde{T}_{z\omega}(s)=T_{z\omega}(s^{-1})=F_1(\tilde{G}(s),\tilde{K}(s))$;然后,用定理1对其进行降阶得 $\hat{\tilde{T}}_{z\omega}(s)=F_1(\tilde{G},\hat{\tilde{K}})$;最后,根据文献[3]中的引理9.2.2显然有

$$\hat{T}_{z\omega}(s)=\hat{\tilde{T}}_{z\omega}(s^{-1})=F_1(\tilde{G}(s^{-1}),\hat{\tilde{K}}(s^{-1}))=F_1(G(s),\hat{K}(s)).$$ 证毕.

4 保证闭环性能品质的广义奇异摄动降阶法

设离散系统的控制器 $K(z)$的状态方程形式与式(5)相同,很容易得到离散系统的保

证闭环性能品质的均衡截取降阶方法.再利用广义奇异摄动降阶方法同它的双线性变换关系,便得出了保证闭环性能品质控制器降阶的广义奇异摄动方法.

定理3. 在定理1的条件下,式(5)的广义奇异摄动降阶控制器

$$\hat{K}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \hline \hat{C}_k & \hat{D}_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{k1} + A_{k2}(\alpha I - A_{k4})^{-1}A_{k3} & B_{k1} + A_{k2}(\alpha I - A_{k4})^{-1}B_{k2} \\ \hline C_{k1} + C_{k2}(\alpha I - A_{k4})^{-1}A_{k3} & D_{k2} + C_{k2}(\alpha I - A_{k4})^{-1}B_{k2} \end{array}\right],$$

这里 $K(s)$ 系统矩阵分块同 Σ 的分块一致.降阶后闭环系统满足

$$\hat{T}_{z\omega}(s) = F_1(G(s), \hat{K}(s)) \in RH_\infty,$$

并且有 $\|T_{z\omega} - \hat{T}_{z\omega}\|_\infty < 2\sum_{i=r+1}^{m} \sigma_i$.

5 结论

本文利用奇异摄动类降阶方法同截取降阶方法的双线性变换关系,得出了保证闭环性能品质的奇异摄动类控制器降阶方法.通过数值例子可以看出,奇异摄动降阶法的优点是零频率处无差,它能够较好地保证降阶后系统响应的稳态值不变.广义奇异摄动降阶法可以通过选择参数 α 得到比较满意的降阶控制器.

参 考 文 献

1 Zhou K, D'souza C, Cloutier J R. Structurally balanced controller order reduction with guaranteed closed loop performance. *System and Control Letters*, 1995, **24**(2):235~242

2 Oh D Ch, Bang K H, Park H B. Controller order reduction using singular perturbation approximation. *Automatica*, 1997, **33**(6):1203~1207

3 Green M, Limbeer D. Linear Robust Control, Eaglewood Cliffs, NJ:Printice-Hall, 1995, 338~339

4 张力军,程鹏.保证性能品质的奇异摄动降阶方法.见:中国控制会议文集,浙江宁波,1998,国防大学出版社,117~120

张力军 1971年生,1998年获北京航空航天大学自动控制系博士学位,研究领域为鲁棒控制、控制器降阶、飞行控制系统以及奇异摄动控制系统的分析与设计.

程 鹏 1938年生,1962年毕业于北京大学数学力学系.现任北京航空航天大学自动控制系教授、博士生导师.研究领域为线性系统理论、多变量系统理论、鲁棒控制和飞行控制系统.