第26卷 第3期
2000年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 3
May, 2000

短文

区间系统的离散鲁棒 Kalman 滤波[1)]

张 勇 史忠科* 戴冠中
(西北工业大学空中交通管理研究所 西安 710072)
(* E-mail: zkeshi @ nwpu. edu. cn)
周自全
(中国飞行试验研究院 西安 710089)

摘 要 着重研究区间系统的鲁棒滤波问题. 通过等价变换, 将区间系统转换为对应的矩阵范数不确定系统, 并据此导出区间系统的鲁棒滤波算法. 该算法为一离散验后(a posteriori)滤波算法, 它能保证区间系统的滤波误差有界. 理论分析和实际计算结果表明, 本算法能达到比验前(a priori)滤波小得多的滤波误差的方差上界.

关键词 鲁棒滤波, 区间系统, 鲁棒识别, 状态估计.

ROBUST KALMAN FILTERING FOR THE DISCRETE-TIME INTERVAL SYSTEM

ZHANG Yong SHI Zhongke DAI Guanzhong
(*Institute of Air Traffic Management, NPU, Xi'an* 710072)
ZHOU Ziquan
(*China Flight Test Establishment, Xi'an* 710089)

Abstract This paper deals with the robust Kalman filtering method for the discrete-time interval system. By equivalent transformation, the interval system is transformed to an uncertain system with matrix norm bounds. Then a posteriori robust Kalman filter is proposed, which can guarantee a variance bound of the filtering error. Both analysis and practical computing show that this filter can get a much lower variance bound than a priori one can.

Key words Robust filtering, interval system, robust identification, state estimation.

---

1) 国家自然科学基金、国防基金资助项目.
收稿日期 1998-07-27 收修改稿日期 1999-03-10

1 引言

区间系统是指系统状态矩阵的元素在一些确定区间内变化的系统. 这类系统在实际中广泛存在,如电机控制系统等. 近年来,关于区间系统的鲁棒控制问题已取得许多成果[1,2],但关于区间系统的鲁棒滤波研究尚不多见. 另一方面,含不确定模型误差系统的鲁棒 Kalman 滤波问题得到了广泛地研究,并取得了不少的成果[3]. 但这些成果都以考虑验前(a priori)滤波的形式为主,较少使用验后(a posteriori)滤波的算法. 由于 Kalman 滤波验后算法的精度比验前算法高,故研究鲁棒条件下的验后滤波算法具有很大的实际意义.

2 问题描述

考虑如下离散区间系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = A\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{w}_k, \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{y}_k = C\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k, \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1. \tag{1b}$$

上式中状态 $\boldsymbol{x}_k \in R^n$;输出 $\boldsymbol{y}_k \in R^r$;系统噪声向量$\boldsymbol{w}$ 的噪声强度为 $W \geqslant 0$,观测噪声向量$\boldsymbol{v}_k$ 的强度为 $V>0$,它们都与系统状态无关;B 和 C 为适当维数的矩阵,A 为系统状态转移矩阵,它的参数不能准确确定,但已知它们属于某些确定的区间,即

$$A \in [L,U] \triangleq \{A \in R^{n\times n} \mid l_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant u_{ij}, \quad i,j = 1,2,\cdots n\}, \tag{2}$$

这里 L 和 U 分别为 A 中各元素的下界和上界组成的矩阵.

可以方便地证明[2],区间矩阵 A 可等价地表示为如下矩阵不确定的形式

$$A = A_0 + HFE, \qquad \forall\ FF^{\mathrm{T}} \leqslant I_{n^2}, \tag{3a}$$

其中 $A_0=(U+L)/2$,令 $G=(U-L)/2$,则 G 中的元素 $G_{ij} \geqslant 0$,

$$H = \left[\sqrt{G_{11}}\boldsymbol{e}_1 \cdots \sqrt{G_{1n}}\boldsymbol{e}_1 \vdots \cdots\cdots \vdots \sqrt{G_{n1}}\boldsymbol{e}_n \cdots \sqrt{G_{n1}}\boldsymbol{e}_n\right]_{n\times n^2}, \tag{3b}$$

$$E = \left[\sqrt{G_{11}}\boldsymbol{e}_1 \cdots \sqrt{G_{1n}}\boldsymbol{e}_1 \vdots \cdots\cdots \vdots \sqrt{G_{n1}}\boldsymbol{e}_n \cdots \sqrt{G_{n1}}\boldsymbol{e}_n\right]^{\mathrm{T}}_{n\times n^2}, \tag{3c}$$

$\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个元素为1的单位列向量,F 为 $n^2\times n^2$阶对角矩阵,I_{n^2}表示 n^2阶单位矩阵.

这样,区间系统的滤波问题就转化为不确定系统(1)和(3)的滤波问题. 参考标准的 Kalman 滤波算法,本文采用具有如下结构的验后滤波公式

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = A_{e,k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k + K_{e,k+1}(\boldsymbol{y}_{k+1} - CA_{e,k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_k), \tag{4}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 为系统状态的滤波结果,$A_{e,k+1}$和 $K_{e,k+1}$分别为滤波器的状态矩阵和增益矩阵.

3 鲁棒验后滤波算法

参照系统(1),(3)和滤波方程(4),定义状态的估计误差 $\boldsymbol{e}_k=\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k$,则有

$$\boldsymbol{e}_{k+1} = (I - K_{e,k+1}C)[A_{e,k+1}\boldsymbol{e}_k + (A_0 - A_{e,k+1} + HFE)\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{w}_k] - K_{e,k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} \tag{5}$$

考虑扩展状态系统 $\eta_k=[\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,则其运动方程为

$$\eta_{k+1} = (\hat{A} + \hat{H}F\hat{E})\eta_k + B\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{v}_{k+1}\end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ (I-K_{e,k+1}C)(A_0-A_{e,k+1}) & (I-K_{e,k+1}C)A_{e,k} \end{bmatrix},\quad E=[E\quad 0], \tag{7a),(7b}$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix} B & 0 \\ (I-K_{e,k+1}C)B & -K_{e,k+1}) \end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix} H \\ (I-K_{e,k+1}C)H \end{bmatrix}. \tag{7c),(7d}$$

容易验证扩展系统的状态方差阵 $X_k=E\{\eta_k\eta_k^{\mathrm{T}}\}$ 满足 $X_k\leqslant\widetilde{X}_k$，这里 $\widetilde{X}_k$ 是满足如下迭代方程的正定解

$$\widetilde{X}_{k+1}=(1+\lambda^{-2})A\widetilde{X}_kA^{\mathrm{T}}+(1+\lambda)^2\bar{\sigma}(\hat{E}\widetilde{X}_k\hat{E}^{\mathrm{T}})\hat{H}H^{\mathrm{T}}+\hat{B}\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}\hat{B}^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

这里 $\lambda>0$为任意实数，$\bar{\sigma}(P)$表示矩阵 P 的最大奇异值，其他参数的定义同前.

将上式中的 $\widetilde{X}$ 按 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 的维数分解成如下四块子矩阵

$$\widetilde{X}_k=\begin{bmatrix} \widetilde{X}_{11,k} & \widetilde{X}_{12,k} \\ \widetilde{X}_{21,k} & \widetilde{X}_{22,k} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

显然，区间系统(1)的滤波误差方差满足

$$E\{(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k)^{\mathrm{T}}\}\leqslant\widetilde{X}_{22,k}\triangleq Q_k. \tag{10}$$

现需合理选择 $A_{e,k+1}$和 $K_{e,k+1}$以保证$\{Q_k\}$序列最小，由此本文得到以下主要结果.

定理1. 如果对任一实数 $\lambda>0$，有满足下式的正定解 R_k 存在

$$R_{k+1}=(1+\lambda^{-2})A_0R_kA_0^{\mathrm{T}}+(1+\lambda^2)\bar{\sigma}_kHH^{\mathrm{T}}+BWB^{\mathrm{T}}, \tag{11}$$

则区间系统(1)的滤波方程(4)中，选择

$$A_{e,k+1}=A_0, \tag{12a}$$

$$K_{e,k+1}=P_kC^{\mathrm{T}}(V+CP_kC^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{12b}$$

能保证区间系统的滤波误差上界序列$\{Q_k\}$达到极小，且 Q_k 满足如下迭代方程

$$P_k=(1+\lambda^{-2})A_0Q_kA_0^{\mathrm{T}}+(1+\lambda^2)\bar{\sigma}_kHH^{\mathrm{T}}+BWB^{\mathrm{T}}, \tag{13a}$$

$$Q_{k+1}^{-1}=P_k^{-1}+C^{\mathrm{T}}V^{-1}C, \tag{13b}$$

$$Q_0=R_0, \tag{13c}$$

其中 $\bar{\sigma}_k=\bar{\sigma}(ER_kE^{\mathrm{T}})$为矩阵 ER_kE^{T} 的最大奇异值.

证明. 将(8)式中的 $\widetilde{X}$ 按分块形式展开，按(12)式选择 $A_{e,k+1}$可保证 $\widetilde{X}_{12,k}=\widetilde{X}_{22,k}$成立，这意味着滤波误差 $\boldsymbol{e}_k$ 与状态估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 无关，从而可达到最优的状态估计值[3]. 再由 $\widetilde{X}_{22,k+1}$对 $K_{e,k+1}$求极值，即可得 $K_{e,k+1}$的表达式. 然后将 $A_{e,k+1}$和 $K_{e,k+1}$代入分块矩阵 $\widetilde{X}_{22,k+1}$，经过一定的矩阵运算，即可得到方程(13). 方程(11)由 $\widetilde{X}_{11,k+1}$子块的方程直接得来.　　证毕.

本算法在计算形式上与标准 Kalman 滤波结构相似，公式中的 P_k 对应于标准 Kalman 滤波中的验前方差阵(预测方差)，而 Q_k 对应于验后方差阵(滤波方差). 由(13)式知，验后滤波方差阵 Q_k 一定小于验前滤波方差阵 P_k. 另外，HH^{T} 和 $\bar{\sigma}(ER_kE^{\mathrm{T}})$可直接算得

$$HH^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}\Big[\sum_{j=1}^{n}h_{1j},\cdots\sum_{j=1}^{n}h_{nj}\Big], \tag{14}$$

$$\bar{\sigma}(ER_kE^{\mathrm{T}}) \leqslant \bar{\sigma}(EE^{\mathrm{T}})\bar{\sigma}(R_k) = \max\Big(\sum_{j=1}^{n} h_{1j},\cdots,\sum_{j=1}^{n} h_{nj}\Big)\bar{\sigma}(R_k). \tag{15}$$

当系统维数较高时,可采用(14)和(15)式代入定理中计算,以减少计算困难.

4 计算实例

考虑如下形式的区间系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} (0,0) & (-0.5,-0.5) \\ (1,1) & (0.7,1.3) \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_k + \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{w}_k, \tag{16a}$$

$$\boldsymbol{y}_k = [-100\ \ 10]\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k, \tag{16b}$$

其中噪声 $\boldsymbol{w}_k,\boldsymbol{v}_k$ 的强度为 $W=1,V=100$. 现需要对状态向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的第一个分量 $x_{1,k}$进行滤波处理. 采用(13)式,算得稳态滤波误差的方差上界为1.43,而对应的验前滤波误差上界为85.94. 另外,我们还在矩阵 A 分别取为区间矩阵的中心、上界和下界三种情况下,计算了鲁棒滤波误差方差的真实值,并与标准 Kalman 滤波的结果进行了比较,结果见表1. 从表中可见,当系统矩阵有偏差时,本文提出的滤波算法有较大的优越性.

表1 $E\{(x_1-\hat{x}_1)^2\}$的真实值比较

滤波算法	$A=A_0$	$A=A_0+G$	$A=A_0+G$
标准 Kalman 滤波	0.026	2.56	1.38
验后鲁棒滤波	0.84	0.87	0.81

5 结论

本文研究了区间系统的鲁棒滤波问题,并给出了对应的鲁棒验后滤波算法,它能保证区间系统滤波误差的方差在一定的范围之内. 理论分析和实际算例都表明,本算法能得到比鲁棒验前滤波算法更小的估计误差方差上界. 与标准 Kalman 滤波算法相比,当系统矩阵有偏差时,本算法有较大的优越性.

参 考 文 献

1 Soh C B. Robust stability of dynamic interval matrices. *Control Theory and Advanced Technology*, 1994, **10**: 73～80

2 吴方向,史忠科,戴冠中. 区间系统的 H_∞ 鲁棒控制. 自动化学报,1999,**25**(2):

3 Yahali Theodor, Uri Shaked. Robust discrete-time minimum variance filtering. *IEEE Trans. Signal Process*, 1996, **44**(2): 181～189

张 勇 1965年生,西北工业大学博士生,曾获国家教委、航空航天工业科技进步奖四项,主要研究方向为鲁棒控制和鲁棒滤波、交通控制、信号处理和信息融合等.

史忠科 1956年生,工学博士,教授,博士生导师. 近年来主持了30余项实际控制系统的研究. 16项成果已经通过了部级技术鉴定;获国家教委、航空航天工业科技进步奖10项,在国内外刊物上发表论文80余篇,在国内外学术会议上发表论文50余篇,出版专著5部. 主要研究领域为随机控制、智能控制、飞行力学、交通控制等.