第26卷 第6期
2000年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 6
Nov., 2000

离散系统的鲁棒最小方差滤波新算法及分析[1)]

张 勇 史忠科 戴冠中
(西北工业大学空中交通管理系统研究所 西安 710072)
(E-mail: zkeshi@nwpu.edu.cn)
周自全
(中国飞行试验研究院 西安 710089)

摘 要 提出了一种线性离散不确定系统鲁棒最小方差滤波新算法. 当离散系统含有不确定项时,能保证滤波误差的方差有界且最小. 同已有算法相比,该算法只需要求解两个相互独立的离散 Riccati 方程,可大大降低鲁棒滤波的计算和分析难度. 通过对算法稳定性和设计参数取值范围的分析表明,为了保证这种鲁棒滤波器存在,只要求离散系统中受不确定项影响的子系统二次稳定即可. 实际算例显示了算法的有效性.

关键词 鲁棒滤波,不确定系统,鲁棒识别,状态估计.

A NEW ROBUST MINIMUM VARIANCE FILTER FOR UNCERTAIN DISCRETE-TIME SYSTEMS

ZHANG Yong SHI Zhongke DAI Guanzhong
(*Institute of Air Traffic Management System, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072)

ZHOU Ziquan
(*China Flight Test Establishment, Xi'an* 710089)

Abstract A new robust minimum variance filtering method for uncertain linear discrete-time systems is developed, which can guarantee minimizing bounded variance of filtering error. Unlike other robust filters, this filter only needs to solve two independent Riccati difference equations. So it is simple and effective to calculate and analyze. The existence of the new filter can be ensured by the quadratic stable of the sub-system that is affected by uncertain parameters. This result relaxes the assumption of quadratic stable of the whole system, which is required for some other robust filters. The practical calculation shows that the new robust Kalman filter is more effective.

1)国家自然科学基金(69874031)资助项目.
收稿日期 1998-12-07 收修改稿日期 1999-07-19

Key words　Robust filtering, uncertain system, robust recognition, state estimation.

1 引言

卡尔曼滤波算法是实际信号和数据处理中广泛应用的最主要方法之一[1~3]. 大量结果表明,即使存在较小系统模型误差,也可能导致卡尔曼滤波性能显著降低,甚至造成滤波算法发散[1~3]. 因而研究系统存在不确定模型误差时的鲁棒滤波技术具有十分重要的实际意义,吸引了众多学者进行研究. 文献[1]研究了噪声特性不确定情况下鲁棒滤波问题,但未考虑系统参数不确定的情况. 文献[2]采用传递函数方法研究了系统存在不确定情况下的稳态鲁棒滤波算法,得出了鲁棒滤波算法的二次稳定收敛条件. 文献[3]给出了同样情况下的动态鲁棒滤波算法,但算法较复杂,需要同时交互迭代计算两个离散 Riccati 方程,难于进行进一步性能分析[3].

本文研究了线性离散不确定系统的鲁棒最小方差滤波技术,给出了一个新的动态鲁棒滤波算法,并简要分析了算法的稳定性和收敛性条件.

2 问题描述

考虑如下离散时间不确定系统

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = (A + \Delta A)\boldsymbol{x}_k + B\boldsymbol{w}_k, \\ \boldsymbol{y}_k = (C + \Delta C)\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k, \end{cases} \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{x}_k \in R^n$ 是系统状态向量, $\boldsymbol{y}_k \in R^r$ 是 k 时刻系统观测向量, $\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 都是噪声向量,假定它们都是与状态无关的单位独立白噪声向量.

ΔA 和 ΔC 分别表示系统状态转移阵和观测矩阵的不确定参数,具有如下结构

$$\begin{bmatrix} \Delta A \\ \Delta C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} FE, \quad \forall\ F^{\mathrm{T}}F \leqslant I. \tag{2}$$

上式中 $F \in R^{i\times j}$ 是未知参数矩阵; A, B, C, H_1, H_2, E 都为适当维数的矩阵.

假定鲁棒滤波方程结构如下:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = A_{ek}\hat{\boldsymbol{x}}_k + K_{ek}(\boldsymbol{y}_k - C\hat{\boldsymbol{x}}_k), \tag{3}$$

这里 A_{ek}, K_{ek} 分别为待求的滤波状态矩阵和增益矩阵, $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 为系统状态向量估计值.

定义状态估计误差 $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{x}_k - \hat{\boldsymbol{x}}_k$,考虑扩展状态系统 $\eta_k = [\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,有

$$\begin{cases} \eta_{k+1} = (\hat{A} + \hat{H}F\hat{E})\eta_k + \hat{B}\hat{\boldsymbol{w}}_k, \\ \boldsymbol{e}_k = [0 \quad I]\eta_k, \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - A_{ek} & A_{ek} - K_{ek}C \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ B & -K_{ek} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 - K_{ek}H_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = [E \quad 0], \quad \hat{\boldsymbol{w}}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{v}_k \end{bmatrix}. \tag{6}$$

令扩展状态方差阵 $E\{\eta_k,\eta_k^{\mathrm{T}}\}=X_k$，由(4)式知

$$E\{(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k)^{\mathrm{T}}\}=E\{\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}\}=[0\quad I]X_k[0\quad I]^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

本文的问题是如何选择滤波方程(4)中 A_{ek} 和 K_{ek}，使得系统对所有可允不确定参数，都可保证滤波误差的方差不超过一定范围 $\{Q_k\}$，即下式成立

$$E\{(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k)(\boldsymbol{x}_k-\hat{\boldsymbol{x}}_k)^{\mathrm{T}}\}\leqslant Q_k,\quad \forall\ F^{\mathrm{T}}F\leqslant I. \tag{8}$$

3 鲁棒滤波算法

首先考虑扩展系统 η_k 的状态方差上界，对此有如下引理[2,3].

引理1. 如果对任一实数 $\varepsilon>0$，有满足如下离散线性迭代方程

$$\varepsilon^{-1}I-\hat{E}\widetilde{X}_k\hat{E}^{\mathrm{T}}>0, \tag{9}$$

$$\widetilde{X}_{k+1}=\hat{A}\widetilde{X}_k\hat{A}^{\mathrm{T}}+\hat{A}\widetilde{X}_k\hat{E}^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I-\hat{E}\widetilde{X}_k\hat{E}^{\mathrm{T}})^{-1}\hat{E}\widetilde{X}_k\hat{A}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}\hat{H}\hat{H}^{\mathrm{T}}+\hat{B}\hat{B}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

的正定解 $\widetilde{X}_k$ 存在，则系统(5)的状态方差阵 X_k 满足 $X_k\leqslant\widetilde{X}_k$.

将引理1中的 $\widetilde{X}_k$ 按 $\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{e}_k$ 相应的维数分解成如下四块子矩阵

$$\widetilde{X}_k=\begin{bmatrix}\widetilde{X}_{11,k} & \widetilde{X}_{12,k}\\ \widetilde{X}_{21,k} & \widetilde{X}_{22,k}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

令 $Q_k\hat{=}\widetilde{X}_{22,k}$，由引理1知滤波误差的方差将不大于 Q_k. 另外定义 $P_k\hat{=}\widetilde{X}_{11,k}$，则 P_k 代表了原系统状态向量方差上界，显然合理的滤波结果还应满足 $Q_k\leqslant P_k$ 成立. 如此得到本文主要结果.

定理1. 对于系统(1)如果有满足如下条件

$$\varepsilon^{-1}I-EP_kE^{\mathrm{T}}>0, \tag{12}$$

$$P_{k+1}=AP_kA^{\mathrm{T}}+AP_kE^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I-EP_kE^{\mathrm{T}})^{-1}EP_kA^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}H_1H_1^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

的正定阵 P_k 和实数 $\varepsilon>0$ 存在，则选择如下的滤波方程参数

$$\begin{cases}K_{ek}=(ANC^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}H_1H_2^{\mathrm{T}})(I+CNC^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}H_2H_2^{\mathrm{T}})^{-1},\\ A_{ek}=A+(A-K_{ek}C)Q_kE^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I-EQ_kE^{\mathrm{T}})^{-1}E,\end{cases} \tag{14}$$

能保证滤波误差上界 Q_k 达到极小，且 Q_k 满足如下离散 Ricatti 方程

$$\begin{cases}Q_{k+1}=ANA^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}H_1H_1^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}}-(ANC^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}H_1H_2^{\mathrm{T}})K_{ek}^{\mathrm{T}},\\ Q_0=R_0,\end{cases} \tag{15}$$

这里 $N=Q_k+Q_kE^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I-EQ_kE^{\mathrm{T}})^{-1}EQ_k$.

证明. 将引理1中的 $\widetilde{X}_k$ 按(11)式分块展开，显然有(12)和(13)式成立. 另外，根据正交投影定理，在达到最优滤波时，应有 $\widetilde{X}_{12,k}=\widetilde{X}_{21,k}=Q_k$ 成立. 现考虑 $\widetilde{X}_k$ 的(2,2)块(即 Q_{k+1})，令

$$M=E^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I-EP_kE^{\mathrm{T}})^{-1}E,\quad \Delta=A-A_{ek},$$
$$D=(P_k-Q_k)[I+M(P_k-Q_k)], \tag{16}$$

$$Q_{k+1}=[(A-A_{ek})P_k+(A_{ek}-K_{ek}C)Q_k](I+MP_k)(A-A_{ek})^{\mathrm{T}}+$$
$$(A-A_e)(I+P_kM)Q_k(A_{ek}-K_{ek}C)^{\mathrm{T}}+(A_{ek}-K_{ek}C)(Q_k+Q_kMQ_k)(A_{ek}-$$
$$K_{ek}C)^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}(H_1-K_{ek}H_2)(H_1-K_{ek}H_2)^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}}+K_{ek}K_{ek}^{\mathrm{T}}=$$
$$\Delta D\Delta^{\mathrm{T}}+\Delta(P_k-Q_k)MQ_k(A-K_{ek}C)^{\mathrm{T}}+(A-K_{ek}C)Q_kM(P_k-Q_k)\Delta^{\mathrm{T}}+$$

$$(A - K_{ek}C)(Q_k + Q_kMQ_k)(A - K_{ek}C)^{\mathrm{T}} +$$
$$\varepsilon^{-1}(H_1 - K_{ek}H_2)(H_1 - K_{ek}H_2)^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} + K_{ek}K_{ek}^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

上式中与 Δ 有关的项仅为前三项,通过 Q_{k+1} 对 Δ 取极值可得

$$\Delta = -(A - K_{ek}C)Q_kM(P_k - Q_k)D^{-1}, \tag{18}$$

从而

$$A_{ek} = A + (A - K_{ek}C)Q_kM(P_k - Q_k)D^{-1}. \tag{19}$$

将(19)式带入 Q_{k+1} 式中,参照(16)式和定理1中 N 的定义,经过较繁琐的矩阵计算,可得(14)式. 另外,将(14)和(11)式代入(10)式,经简单计算可以证明此时能保证 $\widetilde{X}_{12,k}=\widetilde{X}_{21,k}=Q_k$ 成立. 证毕.

比较(13)和(15)式,由 Riccati 方程的特性可知,在相同初值条件下始终有 $Q_k \leqslant P_k$ 成立,从而滤波结果合理. 当条件(12)满足时,可保证迭代计算过程中其它矩阵都是合理定义的,所以滤波算法可行.

本文的结果与连续情况下的鲁棒滤波结果相似,方程(13)代表原系统状态方差界,它是鲁棒滤波存在的条件,而(15)式才代表滤波误差的方差界. 方程(15)在计算时可单独求解,但必须验证在相同 ε 取值时,方程(13)的解存在.

与同类算法相比,本文导出的算法要简单得多. 文献[3]在计算 Q_k 时必须同时交互迭代求解扩展系统方差阵 $\widetilde{X}_k$ 的 Riccati 方程和状态估计误差方差阵 Q_k 的 Riccati 方程,迭代计算的收敛性无法分析而"仅靠试凑". 文献[2]需联立求解 Q_k 和 P_k 这两个 Riccati 方程,P_k 的结果要带入 Q_k 方程计算,计算和分析较复杂,另外文献[2]中仅考虑了稳态滤波的结果.

4 算法分析

根据定理1,ε 的选择必须保证(13)和(15)式同时有解存在. 如果分别分析这两个方程,可能导致重复计算而增加计算量. 下面的定理给出了 ε 取值范围,可大大简化鲁棒滤波的计算和分析过程.

定理2.

(i)对任意 $\varepsilon_m > 0$,如果 ε_m 能保证 Riccati 方程(13)式有满足(12)式的稳态正定解存在,则对任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m]$ 都能保证 Riccati 方程(13)式有满足(12)式的稳态正定解存在,同时,在相同条件下,该 ε 能保证 Riccati 方程(15)式有稳态正定解存在;

(ii)令($\beta = \varepsilon^{-1} > 0$,则 $P(\beta)$ 是 β 的凸函数.

证明. 根据 Riccati 方程的特性和简单计算即可得到本定理,具体过程略.

考虑定理1,不失一般性可将所研究的系统写成可测标准型,对应矩阵分块如下:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}, E = [E_1 \quad 0], B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{bmatrix}, P_k = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} \\ P_{2,k}^{\mathrm{T}} & P_{3,k} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

这时条件(12)可写成

$$\varepsilon^{-1}I - E_1P_{1,k}E_1^{\mathrm{T}} > 0, \tag{21}$$

对应的方程(13)的(1,1)块为

$$P_{1,k+1} = A_1P_{1,k}A_1^{\mathrm{T}} + A_1P_{1,k}E_1^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I - E_1P_kE_1^{\mathrm{T}})^{-1}E_1P_{1,k}A_1^{\mathrm{T}} +$$

$$\varepsilon^{-1}H_{11}H_{11}^{\mathrm{T}}+B_1B_1^{\mathrm{T}},\tag{22}$$

而 P_{2k}，P_{3k}都是线性的 Lyapunov 方程，这里略. 如果方程(22) P_1有稳态正定解，则在有限的时间内，P_{2k}和 P_{3k}的解都不会发散. 这样，鲁棒滤波存在的条件就可用(21)和(22)式替代.

定理3. Riccati 方程(22)有满足(21)式稳态正定解存在的充要条件为 A_1对应的子系统二次稳定.

证明. 根据文献[3]和文献[2]中的结果，可很方便地得到本定理，由于篇幅所限具体证明过程略.

定理3 的分析表明，对于含不确定项的系统滤波来说，并不要求其完全稳定，而只要求受不确定项影响的子系统稳定即可. 当然，这里隐含着不确定参数的变化不能改变系统的稳定特性这一要求.

前面主要讨论了鲁棒滤波算法的存在特性，下面简要地讨论一下线性时不变系统的鲁棒滤波误差界的稳态收敛情况.

定理4. 系统(1)在满足定理3的条件下，假设系统(A,C)可测，(A,B)可控，则鲁棒滤波的误差界 Q_k 收敛到如下的代数 Riccati 方程的解

$$Q=ANA^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}H_1H_1^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}}-(ANC^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}H_1H_2^{\mathrm{T}})K_{ek}^{\mathrm{T}},\tag{23}$$

这里 $N=Q+QE^{\mathrm{T}}(\varepsilon^{-1}I-EQE^{\mathrm{T}})^{-1}EQ$，其它矩阵参见定理1. 证明可参见文献[2]的附录 B.

定理中的可测和可控条件是卡尔曼滤波器存在的充要条件，而定理3的条件是鲁棒滤波存在的前提. 在满足这些条件下鲁棒滤波器是一定存在的，并可由定理1求出.

5 计算实例

现考虑文献[2]中的算例. 系统方程如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_{k+1}=\begin{bmatrix}0 & -0.5\\ 1 & 1+\delta_k\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_k+\begin{bmatrix}-6\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}_k,\\ \boldsymbol{y}_k=[-100 \quad 10]\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{v}_k,\end{cases}\tag{23}$$

其中 δ_k 为不确定参数且有 $|\delta_k|<0.3$，$\boldsymbol{w}_k$，$\boldsymbol{v}$ 的统计特性满足假定1和假定2. 现需要计算状态变量 $\boldsymbol{x}_k$ 第一个分量的滤波结果. 取

$$H_1=[0 \quad 10]^{\mathrm{T}},\quad H_2=0,\quad E=[0 \quad 0.03].\tag{24}$$

根据(13)和(15)式计算鲁棒滤波器，迭代收敛后的稳态滤波方程如下：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}=\begin{bmatrix}0 & -0.58\\ 1 & 1.18\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_k+\begin{bmatrix}-0.0069\\ 0.0051\end{bmatrix}[\boldsymbol{y}_k-C\hat{\boldsymbol{x}}_k].\tag{25}$$

稳态滤波误差的方差上界为69.8，对应该例文献[3]的结果为98.7，而文献[4]中的结果为54.3.

图1给出了在 $\varepsilon=1.35$时，鲁棒滤波误差界 $Q_{11,k}$随迭代时间 k 的变化过程. 在本例中，系统满足可测和可控性假设，迭代时间 k 的计算区间为(0,500](图中仅画到第50步)，而滤波误差在不到10步的迭代后就已经收敛了.

图2给出了在不确定项影响下,系统的状态方差稳态值 P_{11} 和滤波误差界的稳态值 Q_{11} 随实数 ε 的变化情况. 图中可明显看出 $Q_{11} < P_{11}$ 以及它们的凸函数特性.

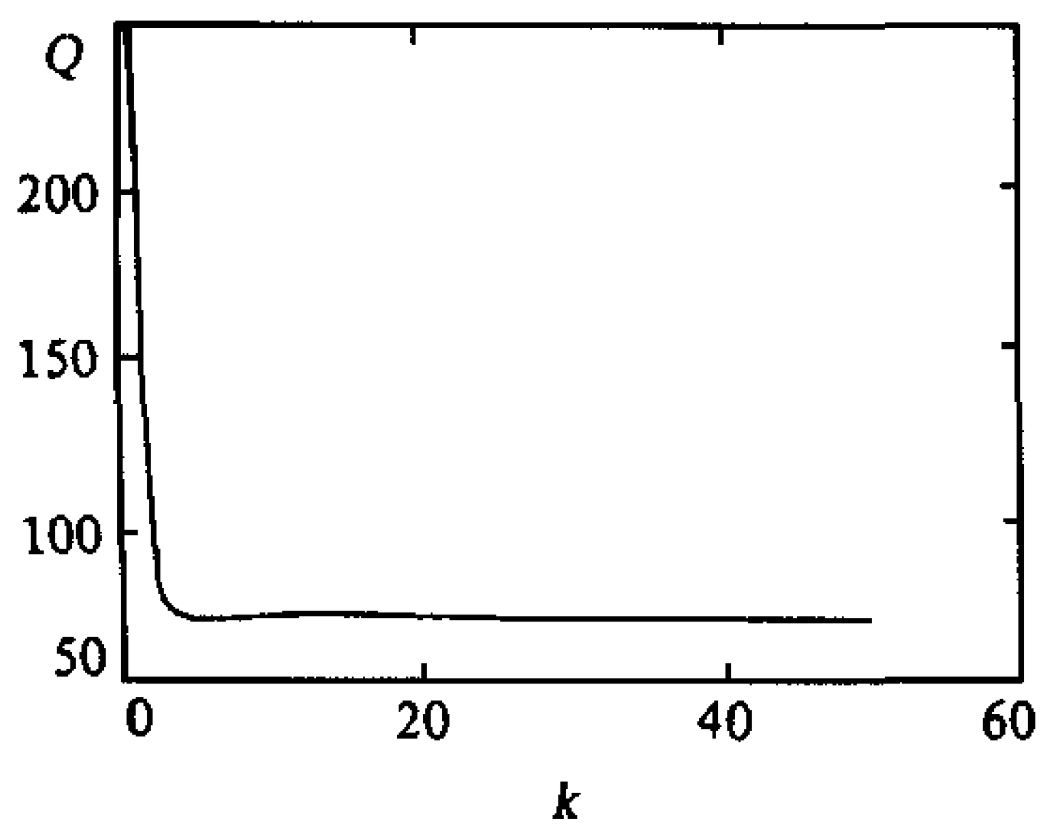

图1　滤波误差界随时间变化曲线

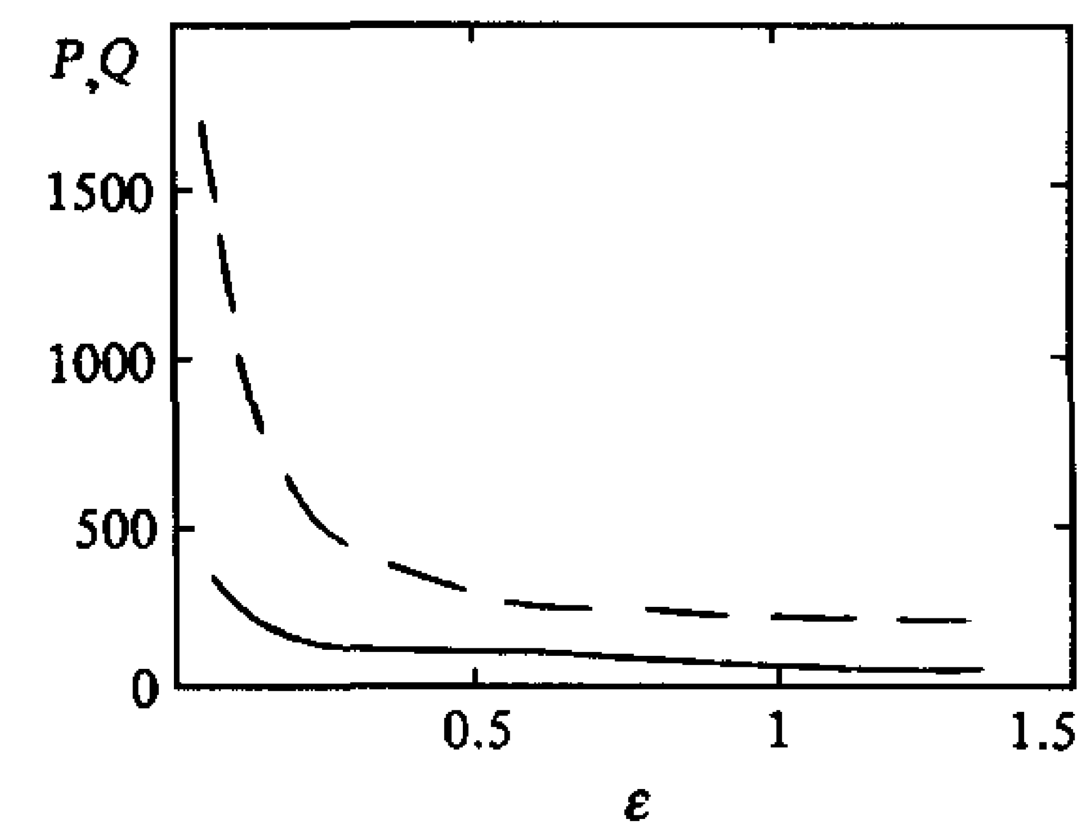

图2　系统状态方差界(虚线)和滤波误差界(实线)随 ε 变化曲线

6　结论

本文研究了线性离散不确定系统的鲁棒滤波算法. 与同类算法[2,3]相比,本算法的计算比较简单,所得结果与连续系统的情形相似,只需求解二个相互独立的离散 Riccati 方程,从而大大简化了鲁棒滤波计算和分析的复杂程度. 最后文中分析了鲁棒滤波算法的收敛特性和参数的取值范围,并通过实际算例展示了算法的有效性.

参　考　文　献

1　Isaac Yaesh, Uri Shaked. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: H_∞ optimal linear control and filtering, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, **36**(11): 1264～1271

2　Xie Lihua, Soh Yengchai, Carlos E de Souza. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, **39**(6): 1310～1314

3　Yahali Theodor, Uri Shaked. Robust discrete-time minimum variance filtering, *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 1996, **44**(2): 181～189

张　勇　1965年生,博士研究生,高级工程师. 先后获国家教委、航空航天总公司和陕西省科技进步奖5项,已发表论文10余篇,主要研究领域有数据融合、随机控制、飞行力学、交通控制等.

史忠科　1956年生, 工学博士,教授,博士生导师. 近年来主持了30余项实际控制系统的研究. 18项成果已经通过了部级技术鉴定,获国家教委、航空航天总公司和陕西省科技进步奖10项,在国内外刊物上发表论文100余篇,在国内外学术会议上发表论文50余篇,出版专著7部. 主要研究领域有随机控制、智能控制、飞行力学、交通控制等.