第26卷 第1期
2000年1月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 1
Jan., 2000

短 文

变边界饱和特性减小抖振的设计方法[1)]

李 涛
(清华大学自动化系 北京 100084)

冯 勇 安澄全
(哈尔滨工业大学电气工程系 哈尔滨 150001)

摘 要 提出了一种变结构控制平滑方法，推导出变结构控制系统的稳态误差指标与饱和特性宽度之间定量的数学关系，通过系统的稳态误差指标可以设计出宽度变化的饱和特性. 仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词 变结构系统，非线性系统，滑模平面.

CHATTERING REDUCTION WITH TIME VARYING WIDTH

LI Tao
(*Automation Department, Tsinghua University, Beijing* 100084)
FENG Yong AN Chengquan
(*Department of Electronic Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001)

Abstract This paper presents a method of softening variable structure control. The mathematical relationship between the steady-state errors and the width of saturating property is presented. Through the specification of the steady-state errors, the saturating property with varying width can be designed. The simulation results prove the validity of the method.

Key words Variable structure systems, nonlinear systems, sliding mode.

1 引言

变结构控制对系统的参数摄动及外部干扰具有很强的鲁棒性，但这种鲁棒性是通过控制量的高频抖动换来的，这就是变结构控制系统中的抖振现象[1]. Xu Jianxin[2]采用扇区特性以消除抖振，但状态轨迹距离平衡点越远时，系统鲁棒性越差. G. Bartolini[3]采用使抖振发生在控制量的虚拟导数上来平滑控制量，也取得了一定的效果. 但以上方法都不能对系统的稳态误差作出定量的描述，系统稳态指标不能通过设计过程来保证，而只能通过仿真或实验方法来试凑. 本文提出一种新的变结构控制设计方法，能够对系统稳态误差作出定量的描述，既能满足平滑控制量的要求，同时又能满足稳态误差的要求.

---

1)航天基金资助项目.

收稿日期 1998-09-04 收修改稿日期 1999-04-27

2　一类非线性控制系统模型

为了简便起见,本文仅讨论单输入单输出非线性系统的变结构控制问题.对这一问题的讨论结果可以推广到一类多输入多输出非线性系统.考虑 n 阶系统

$$\begin{cases}\dot{x}_i = x_{i+1}, \\ \dot{x}_n = \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x},t) + (b_0(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},t))u + d(t),\end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n-1. \tag{1}$$

上式中 $\boldsymbol{x}=[x_1x_2,\cdots x_n]^{\mathrm{T}}\in \boldsymbol{R}^n$ 为系统可观测的状态向量,$\boldsymbol{u}$ 为系统输入,$d(t)$为系统所受界限已知的外界干扰,$d_{\min}\leqslant d(t)\leqslant d_{\max}$,系统输出 $y(t)=x_1$. $b_0(\boldsymbol{x},t)$为已知函数,其余参数为 $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1\theta_2\cdots\theta_m]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x},t)=[\zeta_1(\boldsymbol{x},t)\zeta_2(\boldsymbol{x},t)\cdots\zeta_m(\boldsymbol{x},t)]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\phi}=[\phi_1\phi_2\cdots\phi_l]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},t)=[\eta_1(\boldsymbol{x},t)\eta_2(\boldsymbol{x},t)\cdots\eta_l(\boldsymbol{x},t)]^{\mathrm{T}}$. θ_i 与 ϕ_i 为已知变化范围的系统参数

$$\theta_{i,\min}\leqslant\theta_i\leqslant\theta_{i,\max}, i = 1,2,\cdots\cdots,m, \quad \phi_{i,\min}\leqslant\phi_i\leqslant\phi_{i,\max}, i = 1,2,\cdots\cdots,l.$$

而 $\zeta_i(\boldsymbol{x},t)$与 $\eta_i(\boldsymbol{x},t)$是关于状态向量和时间的非线性函数.由假设可知,系统可被分解为已知结构与不确定参数之积,而这些参数的范围都是已知的.设存在 λ_0为满足式 $\lambda_0+\max|\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{x},t)|\leqslant|b_0(\boldsymbol{x},t)|$的最大正常实数.考虑变结构系统期望跟踪信号的描述如下:

$$\begin{cases}\dot{x}_{\mathrm{d},i} = x_{\mathrm{d},i+1} \\ \dot{x}_{\mathrm{d,n}} = \rho(\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},t) + r(t),\end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,n-1. \tag{2}$$

上式中 $\rho(\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},t)$为已知函数;$\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}}=[x_{\mathrm{d},1},x_{\mathrm{d},2}\cdots x_{\mathrm{d,n}}]^{\mathrm{T}}$ 为系统的期望状态轨迹,系统的期望输出信号 $y_{\mathrm{d}}(t)=x_{\mathrm{d},1}$.定义系统的跟踪误差为 $e(t)=y(t)-y_{\mathrm{d}}(t)$,$r(t)$为系统的参考输入.控制的任务是使系统输出 $y(t)$可跟踪上期望输出信号 $y_{\mathrm{d}}(t)$.

3　变结构控制系统变边界饱和特性平滑方法

选取滑模平面

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_{\mathrm{d},i} - x_i), \qquad c_n = 1 \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

定义 $\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\phi}},\hat{\boldsymbol{d}}$ 为系统(1)的估计参数,$\tilde{\boldsymbol{\theta}},\tilde{\boldsymbol{\phi}},\tilde{\boldsymbol{d}}$ 为估计参数的最大误差,

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\theta}_{\min} + \boldsymbol{\theta}_{\max})/2,\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = (\boldsymbol{\phi}_{\min} + \boldsymbol{\phi}_{\max})/2,\ \hat{d} = (d_{\min} + d_{\max})/2 \\ \tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\theta}_{\max} - \boldsymbol{\theta}_{\min})/2,\ \tilde{\boldsymbol{\phi}} = (\boldsymbol{\phi}_{\max} - \boldsymbol{\phi}_{\min})/2,\ \tilde{d} = (d_{\max} - d_{\min})/2\end{cases}.$$

常规平滑方法存在着缺点,饱和特性的宽度是根据非线性增益项的最大幅值来确定的.为此在滑模平面式(3)周围定义一个宽度随时间变化的饱和特性带

$$B(t) = \{\boldsymbol{x}(t): |S(t)| < \varphi(t)\}, \tag{4}$$

式中时变函数 $\varphi(t)$为饱和带的宽度.通过满足下式,可以保证所有饱和带 $B(t)$外的系统状态轨迹都被吸引至饱和带 $B(t)$内部

$$|S(t)| \geqslant \varphi(t) \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S^2(t)) \leqslant (\dot{\varphi}(t) - \varepsilon)|S(t)|, \tag{5}$$

ε 为一正的裕度常数.对于系统式(1)来说,为满足式(5),其控制量可表述为

$$\boldsymbol{u} = u_{\mathrm{eq}} + \bar{k}(\boldsymbol{x},t)\mathrm{sat}(S(t),\varphi(t)), \tag{6}$$

式中平衡控制项 $u_{\mathrm{eq}}=(v-\hat{\theta}^{\mathrm{T}}\zeta(\boldsymbol{x},t)-\hat{d})(b_0(\boldsymbol{x},t)+\hat{\phi}^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},t))^{-1}$,而变量

$$v = \rho(\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},t) + r(t) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x_{d,i+1} - x_{i+1}), \quad i = 1,2,\cdots,n-1. \tag{7}$$

非线性控制增益

$$\bar{k}(\boldsymbol{x},t) = k(\boldsymbol{x},t) - \dot{\varphi}(t), \tag{8}$$

$$k(\boldsymbol{x},t) = \frac{(\widetilde{\alpha}^{\mathrm{T}} \|\xi\|_1 + \widetilde{d} + \varepsilon)}{\lambda_0}, \tag{9}$$

式中 $\widetilde{\alpha}=[\widetilde{\theta}^{\mathrm{T}}\widetilde{\phi}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $\xi=[\varsigma(\boldsymbol{x},t) \quad \eta^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},t)u_{\mathrm{eq}}]^{\mathrm{T}}$. 而饱和特性函数 $\mathrm{sat}(S(t),\varphi(t))$的定义为

$$\mathrm{sat}(S(t),\varphi(t)) = \begin{cases} \dfrac{S(t)}{\varphi(t)}, & |S(t)| \leqslant \varphi(t), \\ \mathrm{sgn}(S(t)), & |S(t)| > \varphi(t) \end{cases} \tag{10}$$

当$|S(t)|\leqslant\varphi(t)$时,由滑模平面式(3)饱和特性的定义式(10)可得

$$\dot{S}(t) = (\hat{\theta}^{\mathrm{T}} - \theta^{\mathrm{T}})\varsigma(\boldsymbol{x},t) + (\hat{\phi}^{\mathrm{T}} - \phi^{\mathrm{T}})\eta(\boldsymbol{x},t)u_{\mathrm{eq}} + (\hat{d} - d) -$$
$$(b_0(\boldsymbol{x},t) + \phi^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},t))k(\boldsymbol{x},t)\frac{S(t)}{\varphi(t)}.$$

定义

$$G_{\Delta p} = (\hat{\theta}^{\mathrm{T}} - \theta^{\mathrm{T}})\varsigma(\boldsymbol{x},t) + (\hat{\phi}^{\mathrm{T}} - \phi^{\mathrm{T}})\eta(\boldsymbol{x},t)u_{\mathrm{eq}} + (\hat{d} - d), \tag{11}$$

$G_{\Delta p}$则可看作系统中的不确定性因素的总和,式(10)可写为

$$\dot{S}(t) = -\frac{\bar{k}(\boldsymbol{x},t)}{\varphi(t)}(b_0(\boldsymbol{x},t) + \phi^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},t))S(t) + G_{\Delta \mathrm{p}}, \tag{12}$$

令

$$\frac{\bar{k}(\boldsymbol{x},t)}{\varphi(t)} = \gamma, \tag{13}$$

则变结构控制系统在$|S(t)|\leqslant\varphi(t)$区域内的动态特性可由下式确定

$$\dot{S}(t) = -\gamma(b_0(\boldsymbol{x},t) + \phi^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},t))S(t) + G_{\Delta \mathrm{p}}, \tag{14}$$

根据式(13)可得出饱和特性 $B(t)$的宽度 $\varphi(t)$满足下列方程

$$\dot{\varphi}(t) = -\gamma\varphi(t) + k(\boldsymbol{x},t). \tag{15}$$

根据以上分析得到的$|S(t)|\leqslant\varphi(t)$区域内变结构控制系统的动态特性式(14),本文提出下述两个定理(限于篇幅证明在此略去),以及系统的稳态误差指标 e_{ss}与饱和特性宽度 $\varphi(t)$之间的数学关系.

定理1. 若对于被控对象式(1)采用变结构控制策略式(6),则满足系统的稳态误差$e(t)$小于给定值 e_{ss}的充分条件是饱和特性宽度的方程 $\dot{\varphi}(t)=-\gamma\varphi(t)+k(\boldsymbol{x},t)$中的参数 γ 必须满足

$$\gamma \geqslant \frac{\max\limits_{\forall x,t}[\widetilde{\theta}^{\mathrm{T}}\varsigma(\boldsymbol{x},t) + \widetilde{\phi}^{\mathrm{T}}\eta(\boldsymbol{x},t)u_{\mathrm{eq}} + \widetilde{d}]}{\lambda_0 c_1 e_{ss}}. \tag{16}$$

定理2. 若对于被控对象式(1)采用变结构控制策略式(6),则满足系统滑模存在条件的饱和特性的宽度 $\varphi(t)$受下列方程约束

$$\dot{\varphi}(t) = -\gamma\varphi(t) + k(\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}},t). \tag{17}$$

4 仿真实例

考虑单输入非线性控制系统 $\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-(1+|\sin(t)|)\dot{x}^2\cos(3x)+u$. 上述给定系

统中，$\hat{\theta}=-1.5$，$\bar{\theta}=1$，$\xi(\boldsymbol{x},t)=\dot{x}^2|\cos(3x)|$，$b_0(\boldsymbol{x},t)=1$，$\phi^{\mathrm{T}}\eta=0$，$d(t)=0$. 假设系统滑模平面为 $S(t)=\dot{e}(t)+e(t)$，系统要求的性能指标为 $e_{ss}=0.1$. 首先计算 $G_{\Delta p}(\boldsymbol{x}_d,t)$的上限，由$\lambda_0$定义可知，$\lambda_0=1$，根据定理1确定 γ 值，取 $\gamma=12$. 依照方程 $\dot{\varphi}(t)=-\gamma\varphi(t)+k(\boldsymbol{x}_d,t)$所确定的 $\varphi(t)$作为变边界饱和特性的宽度，再依照式(11)取控制策略，其中，取 $\varepsilon=0.3$. 其仿真结果如图1和图2所示.

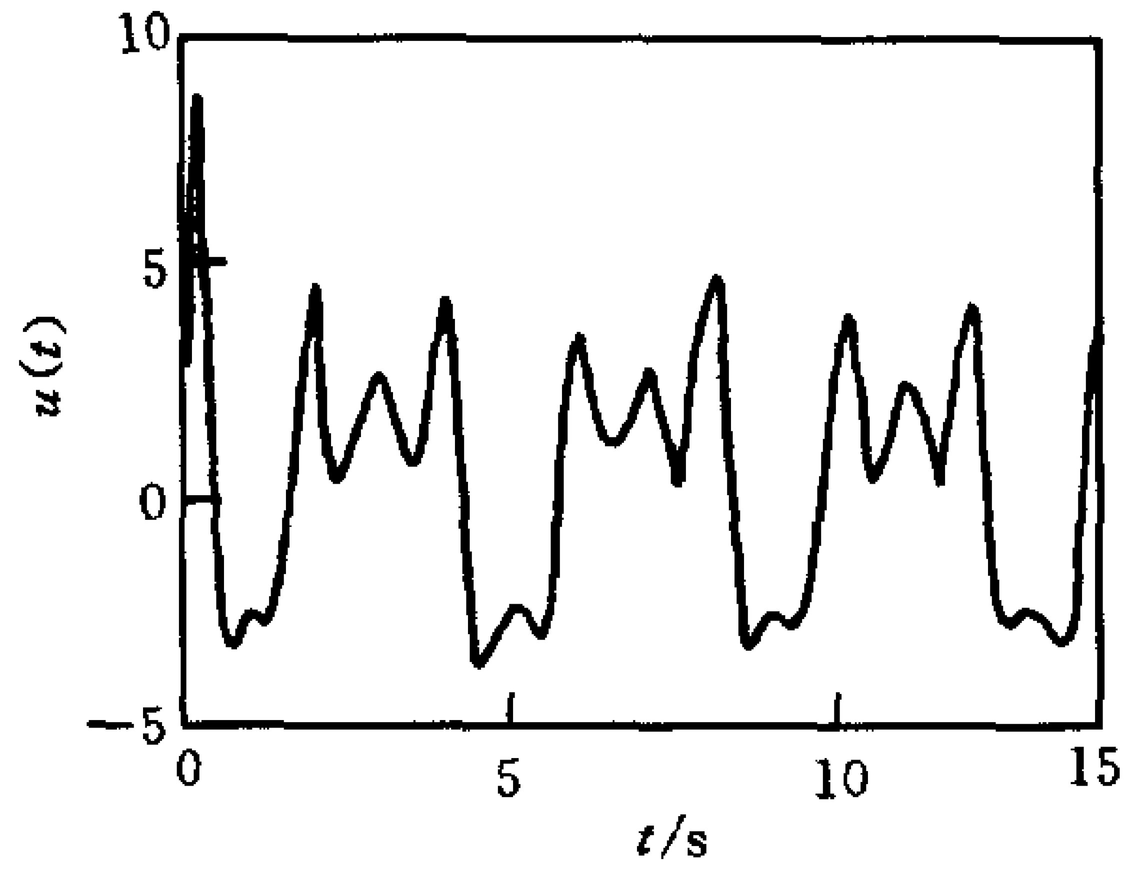

图1　系统控制量

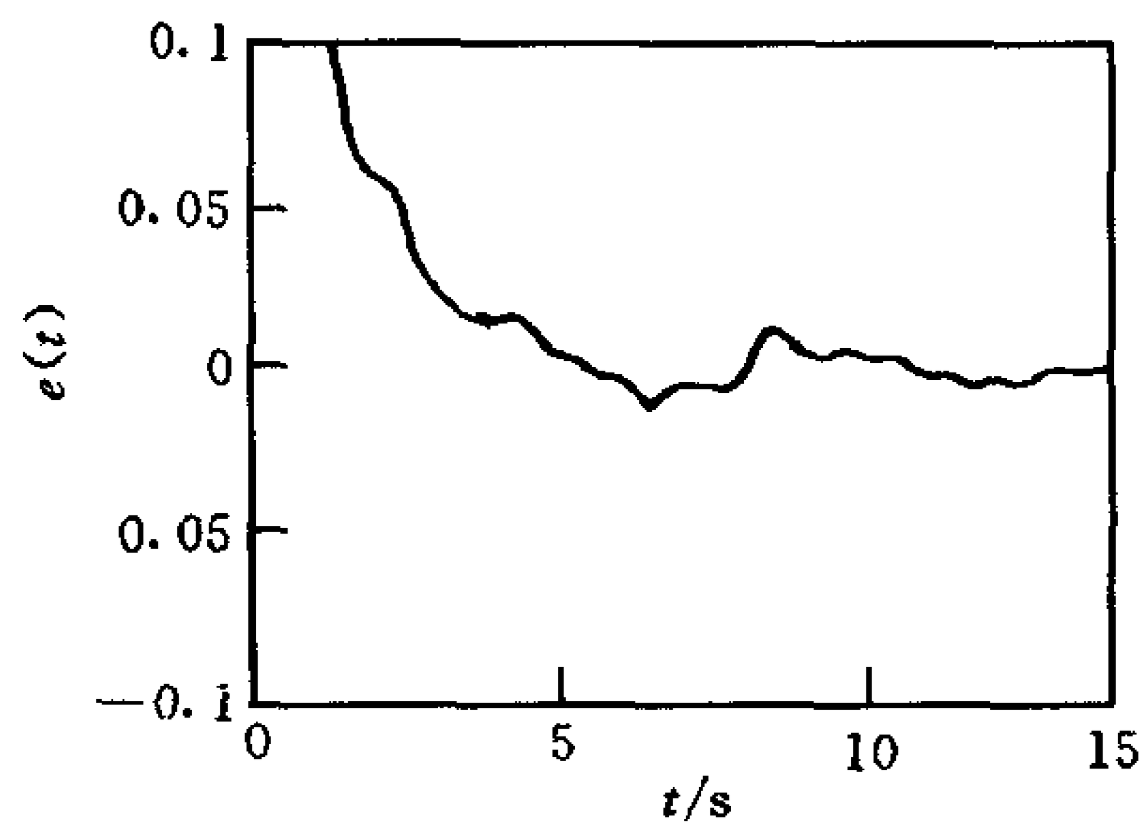

图2　系统稳定误差

5　结束语

本文提出了一种新的变结构控制平滑方法，重点提出两个定理，给出变结构控制系统的稳态误差指标与饱和特性宽度之间的数学关系，根据这个关系，能够设计出宽度变化的饱和特性，从而既消除了系统的抖振又满足了对系统稳态误差指标的要求.

参　考　文　献

1　Slotine J-J E, Li W. Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs: Prentice Hall. 1991

2　Xu Jianxin, Lee Tongheng, Wang Mao *et al*. Design of variable structure controllers with continuous switching control. *Int. J. Contr.*, 1996, **65**(3): 409～431

3　Bontolini G. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1998, AC-**43**(2): 241～246

李　涛　1974年生. 1996年在哈尔滨工业大学获学士学位，1998年在哈尔滨工业大学获硕士学位，现为清华大学博士研究生，主要研究方向为变结构控制理论，并行工程.

冯　勇　1962年生. 1991年在哈尔滨工业大学获博士学位，1997年起任该校工业自动化专业教授，主要研究领域为变结构控制及计算机控制，已发表论著三本，学术论文三十多篇.

安澄全　1974年生. 1997年在哈尔滨工业大学获学士学位，现为哈尔滨工业大学硕士研究生，主要研究方向为变结构控制理论.