



基于 HM 非线性模型的滚动时域 H_∞ 控制¹⁾

耿晓军 席裕庚

(上海交通大学自动化研究所 200030)

摘要 基于 HM (Heterogeneous Model) 非线性系统模型, 提出并研究了滚动时域 H_∞ 控制器的设计. 给出了基于 H_∞ 性能指标的最优控制律和其存在的充分性条件, 该控制律可以保证系统稳定和干扰衰减增益不超过某一上限. 然后, 为了减少计算量, 设计了有上述相同性能保证的次优控制器.

关键词 滚动时域控制, H_∞ 控制, 非线性系统, 预测控制.

RECEDING HORIZON H_∞ CONTROL BASED ON HM NONLINEAR MODEL

GENG Xiaojun XI Yugeng

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Abstract This paper concentrates on the problem of receding horizon H_∞ control for a family of nonlinear systems that can be represented by a heterogeneous model (HM). Under H_∞ performance index, the sufficient conditions are derived for the optimal controller which guarantees the stability with disturbance attenuation. Then, in order to reduce the computational burden, a suboptimal controller which can guarantee the same system performance is designed.

Key words Receding horizon control, H_∞ control, nonlinear systems, predictive control.

1 引言

70年代末 Kwon 等^[1]针对线性时变系统, 提出了一种稳定的控制策略——带终端约束的滚动时域控制 (CRHC). 90年代以来, Mayne 等^[2]将其思想扩展到非线性系统, 并证明在一定假设条件下系统闭环稳定. 在要求控制系统稳定的同时, 人们往往还希望系统性

1) 国家自然科学基金重点项目资助(69934020).

能优良. H_∞ 控制正是如此,它要求控制输出对扰动输入的增益能够不超过某个上界. 结合滚动时域控制和 H_∞ 控制,本文提出并研究了一类有扰动非线性系统的滚动时域 H_∞ 控制.

本文内容共分4节,在第2节中将给出系统的模型和问题的描述. 第3节是本文的主要工作部分,首先基于 H_∞ 性能指标给出滚动时域 H_∞ 最优控制律及其存在的充分性条件,然后为了求解方便,利用 HM 非线性模型的特点,得到了该问题的次优控制器. 该控制器同最优控制器一样可以保证系统稳定和干扰衰减增益小于某一上限的性能要求. 第4节是结束语.

2 问题描述

2.1 非线性系统 HM 模型

实际系统的全局数学模型常常难以得到. 本文采用由如下一系列局部模型集结而成的 HM 近似非线性模型^[3]

$$\begin{aligned} R_l: \dot{x}(t) &= A_l x(t) + B_l u(t) + H_l w(t), \\ y_l &= C_l x(t) + D_l w(t), \quad l = 1, 2, \dots, m, \\ z(t) &= F x(t) + G u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 R_l 表示第 l 个局部区域, $(A_l, B_l, C_l, D_l, H_l)$ 为系统(1)的第 l 个子系统, $x(t), u(t), w(t), z(t), y_l(t)$ 分别为第 l 个子系统的状态、输入、扰动、输出和量测变量, $w(t) \in L_2[0, \infty)$. 令 $G^T[F \ G] = [0 \ I]$.

系统的全局近似模型表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\mu(t))x(t) + B(\mu(t))u(t) + H(\mu(t))w, \\ y(t) &= C(\mu(t))x(t) + D(\mu(t))w(t), \\ z(t) &= Fx(t) + Gu(t). \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $A(\mu(t)) = \sum_{l=1}^m \mu_l A_l$, 其余类似, $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_m(t))$; $\mu_l(x(t))$ 为特征基函

数, $\mu \in M$, M 为特征基函数的集合, 且 $\sum_{l=1}^m \mu_l = 1$.

下面引入标称模型 $(A_0, B_0, C_0, D_0, H_0, F, G)$, 系统(2)重写为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_0 + \Delta A(\mu(t))]x(t) + [B_0 + \Delta B(\mu(t))]u(t) + [H_0 + \Delta H(\mu(t))]w, \\ y(t) &= [C_0 + \Delta C(\mu(t))]x(t) + [D_0 + \Delta D(\mu(t))]w(t), \\ z(t) &= Fx(t) + Gu(t). \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $\Delta A(\mu(t)) = \sum_{l=1}^m \mu_l \Delta A_l$, $\Delta A_l = A_l - A_0$, 其余 $\Delta B(\mu(t)), \Delta C(\mu(t)), \Delta D(\mu(t)), \Delta H(\mu(t))$ 的表达式与 $\Delta A(\mu(t))$ 类似.

对于系统 HM 的建立,包括局部区域的划分、基函数的选取、子系统结构参见文[4].

2.2 滚动时域 H_∞ 控制策略

本文选取如下的滚动时域性能指标:

$$\min_{u \in L_2[t, t+T]} \max_{w \in L_2[t, t+T]} \left(\int_t^{t+T} \{ \lambda [x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau)] d\tau \} + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \right),$$

$$\text{s. t. } x(t+T) = 0, \quad (4)$$

其中 $\lambda > 0$, Q, R 均为正定方阵, R 可逆. $x(t+T) = 0$ 为滚动时域控制的终端约束项, (4) 式中后半部分为常用的 min-max 干扰衰减性能指标, 前半部分是为兼顾系统的动态响应性能而设计的. 总的来说它意味着在每一时刻 t 要找到一个稳定的控制律 $u(\tau)$, $\tau \in [t, t+T]$, 使系统在最坏的干扰情况下性能最优, 同时只将 $u(t)$ 作为实施于系统的控制量.

3 主要结果

3.1 滚动时域 H_∞ 控制问题的最优解

在线性系统滚动时域 H_∞ 控制基础上^[5], 给出系统(2)在性能指标(4)下的最优解和其存在的充分性条件.

定理1. 如果存在正实数 γ, T, λ , 使微分 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau, t+T) = & A(\mu)P(\tau, t+T) + P(\tau, t+T)A(\mu)^T + \\ & P(\tau, t+T)(\lambda Q + F^T F)P(\tau, t+T) + \\ & \gamma^{-2}H(\mu)H(\mu)^T - B(\mu)(\lambda R + I)^{-1}B(\mu)^T, \end{aligned} \quad (5)$$

边界条件为 $P(t+T, t+T) = 0$, 存在一致有界对称正定阵 $P(\tau, t+T)$, $t \leq \tau \leq t+T$, 并且 $P(t, t+T)^{-1}$ 存在且一致有界, 则系统(2)稳定, 且干扰衰减增益满足 $\|\Gamma\|_{L_2[t_0, \infty)} \leq \gamma$. 相应的最优控制律 $u(t) = K(\mu)x(t) = -(\lambda R + I)^{-1}B^T(\mu)P(t, t+T)^{-1}x(t)$, 其中

$$K(\mu) = \sum_{i=1}^m \mu_i k_i x(t), \quad k_i = -(\lambda R + I)^{-1}B_i^T P(t, t+T)^{-1}. \quad (6)$$

证明. 沿用文[5]的证明思路, 我们同样令 $V = x^T(t)P(t, t+T)^{-1}x(t)$.

1) 首先证明系统的闭环稳定性($w=0$ 时). 由(5)有下式成立:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(t, t+T)^{-1} = & -P(t, t+T)^{-1} \frac{d}{dt} P(t, t+T) P(t, t+T)^{-1} = \\ & -P(t, t+T)^{-1} A(\mu) - A(\mu)^T P(t, t+T)^{-1} - (\lambda Q + F^T F) - \\ & P(t, t+T)^{-1} [\gamma^{-2} H(\mu) H(\mu)^T - \\ & B(\mu)(\lambda R + I)^{-1} B(\mu)^T] P(t, t+T)^{-1} - \\ & P(t, t+T)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} P(t, \tau) \Big|_{\tau=t+T} \right) P(t, t+T)^{-1}. \end{aligned}$$

$P(t+T, t+T) = 0$ 保证了 $\frac{\partial}{\partial \tau} P(t, \tau) \Big|_{\tau=t+T}$ 半正定^[5], 故上式最后一项非正. 并注意到(6)式, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(t, t+T)^{-1} \leq & -P(t, t+T)^{-1} [A(\mu) + B(\mu)K(\mu)] - [A(\mu) + \\ & B(\mu)K(\mu)]^T P(t, t+T)^{-1} - P(t, t+T)^{-1} (\gamma^{-2} H(\mu) H(\mu)^T + \\ & B(\mu)(\lambda R + I)^{-1} B(\mu)^T) P(t, t+T)^{-1} - (\lambda Q + F^T F). \end{aligned}$$

对 V 求导, 并将上式代入, 可得到

$$\dot{V} \leq -x^T(t)P(t, t+T)^{-1} \gamma^{-2} H(\mu) H(\mu)^T P(t, t+T)^{-1} x(t) < 0,$$

因此系统闭环渐近稳定.

2) 下面考虑闭环系统的干扰衰减性质. 由于闭环渐近稳定, 对于任意初值 $x(t_0)$ 和

$w \in L_2[0, \infty)$, 有 $x(\infty) = 0$, 于是

$$-\langle x(t_0), P(t_0, t_0 + T)^{-1}x(t_0) \rangle = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \langle x(t), P(t, t + T)^{-1}x(t) \rangle dt \leq \\ \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 - \\ \gamma^{-2} H(\mu)^T P(t, t + T)^{-1}x\|^2 - \|u\|_{\lambda R}^2 - \|x\|_{\lambda Q}^2,$$

上式中 $\|\cdot\|$ 为 $L_2[t_0, \infty)$ 范数, 记 $\|A\|_B^2 = \int_{t_0}^\infty A^T B A dt$. 令 $x(t_0) = 0$, 则有

$$\|z\|^2 \leq \|u\|_{\lambda R}^2 + \|x\|_{\lambda Q}^2 + \|z\|^2 \leq \gamma^2 \|w\|^2.$$

该定理表明, 只要(5)式有可行解, 滚动时域 H_∞ 控制在性能指标(4)式下的最优控制律即可由(6)式得到. (5)式虽然形式上是偏微分方程, 但其第二个参数是固定值 $t+T$, 因此完全可以同微分方程一样数值积分求解. 然而, 在计算(5)式的过程中, 任一时刻 $t+\tau$ 时, (5)式中系数 $A(\mu), B(\mu), H(\mu)$ 皆依赖于 $x(t+\tau)$, 而 $x(t+\tau)$ 又依赖于 $u(t+\tau)$, 这样就形成了一个迭代过程. 在每一时刻要求解 $u(t)$, 都需要许多这样的迭代过程, 计算量非常大. 于是, 本文下面的工作从实际可行性出发, 试图找寻原控制问题的一个满足控制性能要求的次优解.

为此, 在定理1基础上, 首先针对系统(3)的标称模型

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0 x(t) + B_0 u(t) + H_0 w(t), \\ z &= F x(t) + G u(t), \end{aligned} \quad (7)$$

给出下面改进的充分性条件.

推论1. 对于系统(7), 如果存在正实数 γ 和 T , 使下面微分 Riccati 不等式有解,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau, t + T) &\geq A_0 P(\tau, t + T) + P(\tau, t + T) A_0^T + \\ &P(\tau, t + T) (\lambda Q + F^T F) P(\tau, t + T) + \\ &\gamma^{-2} H_0 H_0^T - B_0 (\lambda R + I)^{-1} B_0^T. \end{aligned} \quad (8)$$

边界条件 $P(t+T, t+T) = 0$, $P(\tau, t+T)$ 性质同定理1, 则系统(7)稳定, 且有

$$\|z\|^2 \leq \|u\|_{\lambda R}^2 + \|x\|_{\lambda Q}^2 + \|z\|^2 \leq \gamma^2 \|w\|^2, \quad (9)$$

且控制律为 $u(t) = -(\lambda R + I)^{-1} B^T(\mu) P(t, t+T)^{-1} x(t)$.

证明. 证明过程可参照定理1, 故略.

推论1说明将定理1中的微分 Riccati 方程(5)放松为上述 Riccati 微分不等式(8)后, 所得到的控制律仍然可以实现和定理1的最优控制律相同的控制目的.

3.2 滚动时域 H_∞ 控制问题的次优解

首先引入下面的上界概念^[3]

$$\Delta A(\mu)^T \Delta A(\mu) \leq E^T E, \quad \forall \mu \in M, \quad (10)$$

其中 M 为基函数的集合. $E^T E$ 即为 $\Delta A(\mu)^T \Delta A(\mu)$ 的上界. 寻求上界的方法可参考文[3]. 类似地我们可以得到 $B(\mu)(\lambda R + I)^{-1} B(\mu)^T$ 的下界和 $H(\mu)H(\mu)^T$ 的上界. 分别记为

$$B(\mu)(\lambda R + I)^{-1} B(\mu)^T \geq U(\lambda R + I)^{-1} U^T, \quad \forall \mu \in M; \quad (11)$$

$$H(\mu)H(\mu)^T \leq VV^T, \quad \forall \mu \in M. \quad (12)$$

由文[3, 4]可知, 由于标准基函数的性质, 这里得到的上下界都是与状态量无关的常量.

定理2. 对于系统(2),如果存在正实数 $T, \gamma, \epsilon, \delta$,使下面微分 Riccati 方程有解,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} P(\tau, t+T) = & A_0 P(\tau, t+T) + P(\tau, t+T) A_0^T + \\ & P(\tau, t+T)(F^T F + \epsilon^{-1} E^T E + \delta I + \lambda Q) P(\tau, t+T) + \\ & \epsilon I + \gamma^{-2} V V^T - U(\lambda R + I)^{-1} U^T. \end{aligned} \quad (13)$$

边界条件 $P(t+T, t+T) = 0$, $P(\tau, t+T)$ 性质同定理1,则系统(2)稳定,系统性能满足式(9). 反馈控制律形同式(6).

证明. 在不发生混淆的情况下,下面记 $P(\tau, t+T)$ 为 P . 将(6)式代入系统(2),得到闭环系统.

1) 对于闭环控制系统,令 Lyapunov 函数 $V = x^T(t) P(t, t+T)^{-1} x(t)$.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & x^T [A(\mu) + B(\mu)K(\mu)]^T P^{-1} x + x^T P^{-1} [A(\mu) + B(\mu)K(\mu)] x + \\ & x^T \frac{dP^{-1}}{dt} x \leq x^T (A_0 + \Delta A(\mu))^T P^{-1} x + x^T P^{-1} (A_0 + \Delta A(\mu)) x - \\ & x^T (A_0 P^{-1} + A_0^T P^{-1}) x - x^T (\epsilon^{-1} E^T E + F^T F + \delta I + \lambda Q) x - \\ & x^T P^{-1} (\epsilon I + \gamma^{-2} V V^T + U(\lambda R + I)^{-1} U^T) P^{-1} x. \end{aligned} \quad (14)$$

利用式(10)~(12),及 $\Delta A(\mu)^T P^{-1} + P^{-1} \Delta A(\mu) \leq \epsilon^{-1} \Delta A^T \Delta A + \epsilon P^{-1} P^{-1}$,得 $\dot{V}(x) < 0$. 故闭环稳定.

2) 由于闭环渐近稳定,对于任意初值 $x(t_0)$ 和 $w \in L_2[0, \infty)$,有 $x(\infty) = 0$. 积分式(14),计算 $x(t_0) = 0$ 时系统的干扰衰减增益如下:

$$\begin{aligned} -x(t_0)^T P^{-1} x(t_0) \leq & \int_0^\infty \{w^T H(\mu)^T P^{-1} x + x^T P^{-1} H(\mu) w - x^T P^{-1} \gamma^{-2} V V^T P^{-1} x + \\ & x^T K(\mu)^T B^T P^{-1} x - x^T (F^T F + \lambda Q + \delta I) x\} dt \leq \\ & -\|z\|^2 - \|u\|_{\lambda R}^2 + \gamma^2 \|w\|^2 - \|\gamma w - \gamma^{-1} H(\mu)^T P^{-1} x\|^2 - \\ & \|x\|_{\lambda Q}^2 - \delta \|x\|^2 \Rightarrow \|z\|^2 + \|u\|_{\lambda R}^2 + \|x\|_{\lambda Q}^2 \leq \gamma^2 \|w\|^2. \end{aligned}$$

由定理2可知,在 t 时刻,只要根据将来有限时域 $[t, t+T]$ 内 $\Delta A(\mu)^T \Delta A(\mu)$, $H(\mu)H(\mu)^T$ 的上界和 $B(\mu)(\lambda R + I)^{-1} B(\mu)^T$ 的下界,以及某一恰当的 ϵ, δ ,我们就可以通过积分求解(13)式,得到当前时刻相对性能指标(4)式的一个次优控制律 $u(t)$,该次优控制律可以保证系统稳定,且干扰增益小于 γ .

当优化时域长度 $T \rightarrow \infty$ 时,上述滚动时域 H_∞ 控制器等价于文[3]的 H_∞ 控制器,而这时求解控制器需要整个时域内的系统参数,由于实际系统往往有许多不确定和不可长期预测的因素,因此,本文提出的滚动时域 H_∞ 控制器具有更强的实用性.

类似文[3]中 H_∞ 控制律的算法设计,我们同样可以给出定理2中控制律的求解过程. 基本思想是先假定 ϵ 和 δ 的值,从 $t+T$ 时刻逆向求解(13)式,得到 $P(t, t+T)$. 若 $P(t, t+T)$ 满足条件,则可求出 $u(t)$. 否则,依次减小 ϵ 和 δ 的值,直到找到符合条件的解.

4 结束语

本文基于 HM 非线性模型,提出并研究了滚动时域 H_∞ 控制器的设计. 定理1给出的结论是基于性能指标的 H_∞ 最优控制器的充分条件. 为了解决求解问题,定理2给出次优

控制器及其算法. 该控制器可以满足系统稳定和干扰衰减的性能要求. 本文研究的滚动时域 H_∞ 控制器结合了滚动优化的预测控制和 H_∞ 控制, 因而它一方面可以依据将来有限时段的系统信息在线滚动地设计控制律, 克服了系统信息不可长期预测性, 另一方面它采用 H_∞ 性能指标, 在设计控制器时考虑了扰动影响, 保证了干扰衰减增益在某一设定范围内.

参 考 文 献

- 1 Kwon W H, A E Pearson. A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1977, AC-22(5):838~842
- 2 Mayne D Q, H Michalska. Receding horizon control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1990, AC-35(7):814~824
- 3 Feng G, S G Cao, N W Ress. An approach to H_∞ control of nonlinear systems. *Automatica*, 1996, 32(10):1469~1474
- 4 Cao S G, G Feng. Modeling of complex control systems. In: Proc. IFAC NOLOCOS'95, 1995:935~938
- 5 Tadmor G. Receding horizon revisited: an easy way to robustly stabilize an LTV system. *Systems & Control Letters*, 1992, 18:285~294

耿晓军 女, 1972年生. 1996年于西北工业大学获工学硕士, 现为上海交通大学自动化系博士研究生. 主要从事非线性预测控制的研究.

席裕庚 男, 1946年生. 1968年毕业于哈尔滨军事工程学院, 1984年在德国获工学博士学位, 现为上海交通大学自动化系教授, 博士生导师. 著有动态大系统方法导论, 预测控制等书. 主要从事复杂系统控制理论的研究. 目前主要研究领域是复杂工业过程的优化控制及智能机器人控制.