



一类非线性系统的 H_∞ 鲁棒控制

伏玉笋 田作华 施颂椒

(上海交通大学自动化研究所 上海 200030)

摘要 考虑了在实际中具有工程应用背景的一类非线性不确定系统的 H_∞ 鲁棒控制问题. 基于 Hamilton-Jacobi 不等式, 给出了这类非线性系统渐近稳定且 L_2 增益有限的充分条件. 在这个条件下, 得到了确保闭环系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则的状态反馈控制器.

关键词 非线性系统, H_∞ 理论, Hamilton-Jacobi 不等式, H_∞ 鲁棒扰动衰减.

H_∞ ROBUST CONTROL OF A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS

FU Yusun TIAN Zuohua SHI Songjiao

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Abstract The H_∞ robust control problem of a class of uncertain nonlinear systems with engineering background is researched. Based on Hamilton-Jacobi inequality, a sufficient condition is presented such that the class of nonlinear systems is asymptotically stable and its L_2 -gain is limitable. Under the condition, a state feedback controller is given such that the close-loop systems satisfy H_∞ robust disturbance attenuation performance.

Key words Nonlinear system, H_∞ theory, Hamilton-Jacobi inequality, H_∞ robust disturbance attenuation.

1 引言

自80年代起, 线性系统 H_∞ 理论从各个方面得到了充分的研究. 近年来, 非线性系统 H_∞ 理论备受关注, 对此作出重要贡献的有 Van de Schaft^[1] 及其所附的相关文献. 文[1] 把问题归结为 Hamilton-Jacobi 方程的可解性, 这类似于线性系统 H_∞ 理论中的 Riccati 方程. 最近对非线性系统 H_∞ 理论作出贡献的有文[2~5]. 文[3]给出了在输出反馈的情况下, 扰动衰减问题可解的充分性条件; 文[4]讨论了文[1, 3]所述情况下的必要性条件.

文[6]在重心移动型倒立摆的鲁棒控制这一工程背景下,研究了一类不确定系统.基于 Riccati 不等式,给出了系统渐近稳定且满足 L_2 增益小于1的充分条件,及状态反馈 H_∞ 控制器的设计方法,但文[6]没能推广到更一般的非线性系统情形.

本文对比文[2,6]的模型更为广泛的一类非线性系统模型进行了研究.基于 Hamilton-Jacobi 不等式,给出了满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则的充分条件,及状态反馈控制器的设计算法.本文的结论推广了文献[2]的结果,而且可以用来解决文献[6]所提出的重心移动型倒立摆的鲁棒控制问题.

2 问题的描述

考虑如下非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) + \Delta \mathbf{j}(\dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + g_1(\mathbf{x})\boldsymbol{\omega} + g_2(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (1a)$$

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + k(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (1b)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in R^n$ 是定义在原点某邻域的状态向量($\mathbf{x}(0)=0$), $\mathbf{z}(t) \in R^m$ 是输出向量, \mathbf{u} 是控制输入, $\boldsymbol{\omega}$ 是外界扰动; $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{f}(0)=0$), $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, $k(\mathbf{x})$, $g_1(\mathbf{x})$, $g_2(\mathbf{x})$ 为具有合适维数的已知函数矩阵; $\Delta \mathbf{j}(\dot{\mathbf{x}}, t): R^n \times R \rightarrow R^n$, $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t): R^n \times R \rightarrow R^n$ 表示未知函数向量. 假设 $\Delta \mathbf{j}$ 和 $\Delta \mathbf{f}$ 满足如下增益有界条件^[6]:

$$\Delta \mathbf{j}(\dot{\mathbf{x}}, t) = E_j \boldsymbol{\delta}_j(\dot{\mathbf{x}}, t), \|\boldsymbol{\delta}_j\| \leq \|W_j \dot{\mathbf{x}}\|, \forall \dot{\mathbf{x}} \in R^n, \forall t \in R, \quad (2a)$$

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = E_f \boldsymbol{\delta}_f(\mathbf{x}, t), \|\boldsymbol{\delta}_f\| \leq \|W_f \mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in R^n, \forall t \in R, \quad (2b)$$

式中 $E_j \in R^{n \times n}$, $E_f \in R^{n \times n}$ 以及 W_j, W_f 是已知矩阵, $\boldsymbol{\delta}_j: R^n \times R \rightarrow R^n$, $\boldsymbol{\delta}_f: R^n \times R \rightarrow R^n$ 是满足 $\boldsymbol{\delta}_j(\mathbf{0}, t)=0$, $\boldsymbol{\delta}_f(\mathbf{0}, t)=0$ 的未知向量.

定义 如果系统满足如下条件,则称系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则:

(i) 当 $\boldsymbol{\omega}=0$ 时,系统(1)的平衡点 $\mathbf{x}=0$ 对于任意满足(2)的 $\Delta \mathbf{j}$ 和 $\Delta \mathbf{f}$ 是渐近稳定的;

(ii) 给定 $\gamma > 0$. 当 $\mathbf{x}(\mathbf{0})=0$ 时,对于任意给定的 $T > 0$, $\|\mathbf{z}\|_T < \gamma \|\boldsymbol{\omega}\|_T, \forall \boldsymbol{\omega} \in L_2[0, T]$ 及满足(2)的任意的 $\Delta \mathbf{j}, \Delta \mathbf{f}$ 均成立. 其中 $\boldsymbol{\omega}$ 的 L_2 范数定义如下:

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_T = \left\{ \int_0^T \boldsymbol{\omega}^T(\tau) \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

为便于研究,假设 $k^T(\mathbf{x})[k(\mathbf{x}) \mathbf{h}(\mathbf{x})] = [I \quad \mathbf{0}]$.

3 主要结果

3.1 基本定理

引理1. 令 $\boldsymbol{\omega}=0, \mathbf{u}=0$. 若存在适当的标量 $\lambda_j > 0$ 和 $\lambda_f > 0$, 使得下列 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B_s + [\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}^T] C_s^T D_s \right) Q^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} B_s + [\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}^T] C_s^T D_s \right)^T + \\ [\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x}^T] C_s^T C_s \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

有光滑正定解 $V(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R$ ($V(\mathbf{x}) > 0, V(0)=0$), 则系统(1)的平衡点 $\mathbf{x}=0$ 对于任意满足

(2)式的 Δj 和 Δf 是渐近稳定的. 其中

$$B_s = [\lambda_j E_j \quad \lambda_f E_f], \quad C_s = \begin{bmatrix} W_j/\lambda_j & 0 \\ 0 & W_f/\lambda_f \end{bmatrix}, \quad D_s = \begin{bmatrix} W_j B_s/\lambda_j \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Q = I - D_s^T D_s > 0,$$

$\frac{\partial V}{\partial x}$ 设定为行向量.

证明. 选取李雅普诺夫函数

$$U(x, t) = V(x) + \int_0^t \left(\frac{1}{\lambda_j^2} \left[\left\| W_j \frac{d}{d\tau} \Phi(\tau, x) \right\|^2 - \left\| \delta_j \left(\frac{d}{d\tau} \Phi(\tau, x), \tau \right) \right\|^2 \right] + \frac{1}{\lambda_f^2} \left[\left\| W_f \Phi(\tau, x) \right\|^2 - \left\| \delta_f \left(\frac{d}{d\tau} \Phi(\tau, x), \tau \right) \right\|^2 \right] \right) d\tau,$$

其中 $\Phi(\tau, x)$ 表示方程(1a)对于 $x(0) = x$, $\omega = 0$, $u = 0$ 的解.

$$\dot{U}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) - \frac{\partial V}{\partial x} E_j \delta_j + \frac{\partial V}{\partial x} E_f \delta_f + \frac{1}{\lambda_j^2} (\|W_j \dot{x}\|^2 - \|\delta_j\|^2) + \frac{1}{\lambda_f^2} (\|W_f x\|^2 - \|\delta_f\|^2),$$

注意到

$$\begin{bmatrix} W_j \dot{x}/\lambda_j \\ W_f x/\lambda_f \end{bmatrix} = C_s \begin{bmatrix} f(x) \\ x \end{bmatrix} + D_s \begin{bmatrix} -\delta_j/\lambda_j \\ \delta_f/\lambda_f \end{bmatrix},$$

可得

$$\dot{U}(x, t) < -\xi^T Q^{-1} \xi \leq 0,$$

其中 $\xi = Q \begin{bmatrix} -\delta_j/\lambda_j \\ \delta_f/\lambda_f \end{bmatrix} - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f^T(x) \quad x^T] C_s^T D_s \right)^T$. 所以 $\dot{U} < 0$. 证毕.

注释1. 若取 $f(x) = Ax$, $V(x) = x^T P x$ (P 为对称正定阵), 则(3)式可化简为

$$A^T P + P A + (P B_s + [A^T \quad I] C_s^T D_s) Q^{-1} (P B_s + [A^T \quad I] C_s^T D_s)^T + [A^T \quad I] C_s^T C_s \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} < 0.$$

若 A 是稳定阵, 则可推出文献[6]的引理1. 可见, 本文提出的引理是文献[6]的推广.

定理1. 令 $u = 0$. 如果存在 $\lambda_j > 0$ 和 $\lambda_f > 0$, 使得下列 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f^T(x) \quad x^T] C_s^T D_s \right) Q^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f^T(x) \quad x^T] C_s^T D_s \right)^T + [f^T(x) \quad x^T] C_s^T C_s \begin{bmatrix} f(x) \\ x \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x) g_1^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} + h^T(x) h(x) < 0$$

(4)

有光滑正定解, 则系统(1)满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则.

证明. 由引理1知, 渐近稳定性的条件满足, 即准则的条件(i)满足. 下面证其满足准则的条件(ii).

定义

$$\Phi(x) = \frac{d}{dt} V(x) + \|z\|^2 - \gamma^2 \|\omega\|^2,$$

则

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \frac{\partial V}{\partial x}(f(x) + E_f \delta_f - E_j \delta_j + g_1(x)\omega) + \|z\|^2 - \gamma^2 \|\omega\|^2 = \\ & - \xi^T Q^{-1} \xi - \frac{1}{\lambda_j^2} (\|W_j \dot{x}\|^2 - \|\delta_j\|^2) - \frac{1}{\lambda_f^2} (\|W_f x\|^2 - \|\delta_f\|^2) - \\ & \left\| \gamma \omega - \frac{1}{2\gamma} g_1^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} \right\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

即有

$$\int_0^T \Phi(x) dt = V(x(T)) - V(x(0)) + \|z\|_T^2 - \gamma^2 \|\omega\|_T^2 \leq 0,$$

从而对于任意满足(2)的 Δj 和 Δf , $\|z\|_T < \gamma \|\omega\|_T$ 成立. 证毕.

注释2. 若 $\Delta f, \Delta j = 0$, 即不存在 B_s, C_s, D_s , 则(4)式可化简为

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x) g_1^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + h^T(x) h(x) < 0,$$

这也就是文献[2]中的(7)式.

3.2 状态反馈控制器的设计

下面考虑系统(1)的 H_∞ 综合问题, 即设计状态反馈控制器

$$u = \alpha(x),$$

使得闭环系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则.

显然由定理1可得如下结果.

推论1. 如果存在 $\lambda_j > 0$ 和 $\lambda_f > 0$, 使得下列 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f_k(x) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f_k^T(x) \quad x^T] C_s^T D_s \right) Q^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f_k^T(x) \quad x^T] C_s^T D_s \right)^T + \\ [f_k^T(x) \quad x^T] C_s^T C_s \begin{bmatrix} f_k(x) \\ x \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_1(x) g_1^T(x) \frac{\partial V^T}{\partial x} + h_k^T(x) h_k(x) < 0 \end{aligned} \quad (5)$$

有光滑正定解, 则系统(1)满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则. 其中

$$f_k(x) = f(x) + g_2(x)\alpha(x), h_k(x) = h(x) + k(x)\alpha(x).$$

定理2. 如果存在 $\lambda_j > 0$ 和 $\lambda_f > 0$, 使得下列 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f^T \quad x^T] C_s^T D_s \right) Q^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f^T \quad x^T] C_s^T D_s \right)^T + \\ [f^T \quad x^T] C_s^T C_s \begin{bmatrix} f \\ x \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial V^T}{\partial x} + h^T h - \frac{1}{4} F^T(x) S^{-1}(x) F(x) < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

有光滑正定解, 则使得闭环系统(1)满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则的状态反馈控制器给定如下:

$$u = -\frac{1}{2} S^{-1}(x) F(x), \quad (7)$$

其中

$$F(x) = [g_2^T \quad 0] \left(\frac{\partial V}{\partial x} B_s C_s^T D_s Q^{-1} D_s^T C_s + 2 [f^T \quad x^T] C_s^T [I + D_s Q^{-1} D_s^T] C_s + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \quad 0 \right] \right)^T,$$

$$S(x) = I + [g_2^T \quad 0]C_s^T D_s D_s^T C_s \begin{bmatrix} g_2 \\ 0 \end{bmatrix} + [g_2^T \quad 0]C_s^T C_s \begin{bmatrix} g_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

证明. 把 u 代入(5)式左边, 化简可得

$$\begin{aligned} \text{左边} = & \frac{\partial V}{\partial x} f + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f^T \quad x^T] C_s^T D_s \right) Q^{-1} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} B_s + [f^T \quad x^T] C_s^T D_s \right)^T + \\ & [f^T \quad x^T] C_s^T C_s \begin{bmatrix} f \\ x \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial V^T}{\partial x} + h^T h - \frac{1}{4} F^T(x) S^{-1}(x) F(x) + \\ & \left\| u + \frac{1}{2} S^{-1}(x) F(x) \right\|^2, \end{aligned}$$

当 $u = -\frac{1}{2} S^{-1}(x) F(x)$ 时, 由(6)式可知, 左边 < 0 . 由推论1知, 该定理成立. 证毕.

注释3. 若 $\Delta f, \Delta j = 0$, 即不存在 B_s, C_s, D_s , 则(6), (7)式可化简为

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{4} \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial V}{\partial x} g_1 g_1^T \frac{\partial V^T}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial x} g_2 g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x} + h^T h < 0, \\ u = -\frac{1}{2} g_2^T \frac{\partial V^T}{\partial x}, \end{aligned}$$

这也就是文献[2]中的(46), (47)式(需说明的是, 与文献[2]相比, 本文没有进行零状态可观测的假设, 且扰动衰减的定义采用严格不等式, 所以在一些细节处略有不同, 但这不是本质的, 具体可参阅文献[2]), 可见本文的工作是文献[2]的推广.

4 结束语

非线性系统 H_∞ 控制是近年来鲁棒控制领域中的研究热点之一. 本文研究了一类比较广泛的具有工程应用背景的非线性不确定系统的 H_∞ 鲁棒扰动衰减问题. 基于 Hamilton-Jacobi 不等式, 给出了这样一类非线性系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则的充分条件. 在这个条件下, 得到了确保闭环系统满足 H_∞ 鲁棒扰动衰减性能准则的状态反馈控制器. 本文的结论推广了文献[2]的结果, 而且可以用来解决文献[6]所提出的重心移动型倒立摆的鲁棒控制问题. 需要说明的是: 对于线性系统 H_∞ 控制问题的可解性, 人们已经有比较成熟的算法, 但在非线性系统 H_∞ 理论的研究中, 对于 Hamilton-Jacobi 等式(HJE)或不等式(HJI)的求解是非常困难的, 目前还没有比较好的方法. 估计基于非线性矩阵不等式(NLMI)^[7]的非线性系统 H_∞ 控制问题的求解方法将会受到人们的关注.

参 考 文 献

- 1 Van der Schaft A J. On a state space approach to nonlinear H_∞ control. *System and Control Letters*, 1991, **16**: 1~8
- 2 Van der Schaft A J. L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_∞ control. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **AC-37**(6): 770~784
- 3 Isidori A, Astolfi A. Disturbance attenuation and H_∞ control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **AC-37**(9): 1283~1293
- 4 Ball J, Helton J W, Walker M L. H_∞ control for nonlinear systems via output feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1993, **AC-38**(4): 546~559
- 5 Isidori A, Kang W. H_∞ control via measurement feedback for general nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1995, **AC-40**(3): 466~472

- 6 Shen T L, Zang H Q, Tamura T. Riccati equation approach to robust L_2 -gain synthesis for a class of uncertain nonlinear systems. *Int. J. Control*, 1996, **64**(6):1177~1188
- 7 Lu W M, Doyle J C. H_∞ control of nonlinear systems: a convex characterization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1995, **AC-40**(9):1668~1675

伏玉笋 1972年生. 上海交通大学博士研究生. 目前从事鲁棒与非线性控制方面的研究.

田作华 1946年生. 上海交通大学自动化系教授, 系主任. 目前从事新型监控技术方面的研究.

施颂椒 1933年生. 上海交通大学自动化系教授, 博士生导师. 目前从事鲁棒控制与自适应控制方面的研究.

中国自动化学会第十五届青年学术年会(YAC' 2000) 征文通知

中国自动化学会第十五届青年学术年会(YAC' 2000)将于2000年7月3~4日在上海召开, 这将是我国自动化界青年科技工作者在新世纪的第一次盛会. 本次会议由中国自动化学会、中国自动化学会青年工作委员会主办, 上海交通大学自动化系承办. 会议组委会热烈欢迎全国青年学者前来参加, 并将组织与会者全程免费旁听第三届亚洲控制会议.

一 征文范围

(1)线性与非线性系统控制;(2)自适应控制和预测控制;(3) H_∞ 控制和鲁棒控制;(4)智能控制、模糊控制;(5)系统辨识与建模;(6)故障诊断与容错控制;(7)神经网络及其应用;(8)自动化仪表与过程控制;(9)软件工程、并行处理;(10)人工智能与专家系统;(11)计算机视觉、图象处理与模式识别;(12)机器人学与机器人控制;(13)大系统;(14)电力系统及其自动化;(15)电机驱动及运动控制;(16)传感器与检测技术;(17)离散事件动态系统;(18)计算机集成制造系统;(19)计算机软硬件技术及其应用;(20)系统工程理论、方法及其应用;(21)企业改革, 发展战略与管理决策;(22)工业过程与生产管理;(23)图书馆自动化与数字图书馆技术;(24)其它.

二 征文要求

(1)录用论文将由正式出版社出版《自动化理论、技术及应用》(卷7), 论文应具有一定的学术或实用价值, 未在国内外学术期刊或会议发表过;(2)论文第一作者的年龄不超过40岁;(3)来稿中英文皆可, 请用A4纸打印, 一式三份;(4)投稿时请注明文章所属的研究方向(见征文范围);(5)请说明联系作者的详细通讯地址及电子邮件信箱.

三 奖励

本次会议将首次设立大会优秀论文奖和应用论文奖.

四 重要时间

论文截稿时间为2000年3月1日.

五 投稿地址

上海交大大会自动化研究所 YAC' 2000组委会 邮政编码:200030

联系人: 苏剑波, 李少远 电话:021-62932806-85 传真:021-62933155

Email: jbsu@ascc2000. sjtu. edu. cn 或 syli98@maill. sjtu. edu. cn