第26卷　第2期　　自　动　化　学　报　　Vol. 26, No. 2
2000年3月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 2000

短文

# 时滞系统的状态反馈和基于观测器的输出反馈设计

胡中骥　　施颂椒　　翁正新
（上海交通大学自动化系　上海　200030　E-mail: huzj@263.net）

**摘　要**　考虑了同时具有状态和输入时滞线性定常系统的 $H^\infty$ 镇定问题. 基于动态耗散理论和微分对策原理，通过采用带积分项的储存函数，对系统的状态反馈控制器和基于观测器的输出反馈设计问题进行了处理. 它们的可解充分条件可以化为与时滞相关的矩阵不等式和 Riccati 方程的形式. 得到的与时滞相关的状态反馈控制律和基于观测器的输出反馈控制律都能使闭环系统内稳且具有 $H^\infty$ 干扰衰减.

**关键词**　时滞系统，$H^\infty$ 控制，干扰衰减，微分对策，耗散不等式，线性矩阵不等式.

## STATE FEEDBACK AND OBSERVER-BASED OUTPUT FEEDBACK DESIGN FOR DELAYED SYSTEMS

HU Zhongji　　SHI Songjiao　　WENG Zhengxin
(*Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai*　200030)

**Abstract**　This paper considers the $H^\infty$ stabilization problems for plants with both state delay and control delay. Based on dissipative dynamical system theory and differential game principle, a quadratic storage function with integral items which include the past memory information during the delay span is employed to design $H^\infty$ state feedback controller and observer-based $H^\infty$ output feedback controller. These two problems are converted to mathematical problems of solving some matrix inequalities and Riccati equations which are dependent on the time delays. Besides, the controller laws can make the closed systems intenally stable and guarantee disturbance attenuation.

**Key words**　Time delay systems, $H^\infty$ control, disturbance attenuation, differential game, dissipation inequality, linear matrix inequality.

收稿日期　1998-11-16　收修改稿日期　1999-07-27

# 1 引言

近年来,有关动态时滞系统的稳定性、鲁棒性分析和综合问题的研究又有了一些新的结果[1~4]. 但这些结果要么较少考虑系统同时具有状态和输入时滞[1,2],要么所用方法比较特殊[3,4],其次是所得到的判别条件与时滞无关,这样可能导致较大的保守性. 另一方面,由于最近几年发展起来的用于一般非线性系统分析的基于动态耗散理论和微分对策原理的方法,同样适用于处理时滞系统的分析和综合问题,因此本文也将基于这一思路,用状态空间法处理同时具有状态和输入时滞的线性定常系统的 $H^\infty$ 镇定问题,对系统状态反馈设计和基于观测器的输出反馈设计,分别得到了与时滞参数相关的设计判别条件. 部分结果可以化为 Riccati 方程和 LMI[5]来求解.

# 2 问题的描述和预备知识

考虑下列具有状态和输入时滞的线性定常系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A_1\boldsymbol{x}(t) + A_2\boldsymbol{x}(t-d_1) + B_1\boldsymbol{u}(t) + B_2\boldsymbol{u}(t-d_2) + D\boldsymbol{w}(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = F_1\boldsymbol{x}(t) + H_1\boldsymbol{w}(t), \\ \boldsymbol{z}(t) = F_2\boldsymbol{x}(t) + H_2\boldsymbol{u}(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为系统状态,$\boldsymbol{u}\in R^{n_u}$ 为控制输入,$\boldsymbol{w}\in R^{n_w}$ 为外部干扰输入,$\boldsymbol{y}\in R^{n_y}$ 为量测变量,$\boldsymbol{z}\in R^{n_z}$ 为代价变量,$A_1,A_2,B_1,B_2,F_1,F_2,H_1,H_2$ 为定常适维矩阵.

系统内稳且具有 $H^\infty$ 干扰衰减系数 $\lambda(0<\lambda<1)$ 是指:1)当 $\boldsymbol{w}=0$ 时,系统渐近稳定. 2)当 $\boldsymbol{x}(0)=0$ 时,对 $\forall\ T\geqslant 0$, $\forall\ \boldsymbol{w}\in L_{2e}[0,\infty]$,系统有

$$\int_0^T \boldsymbol{z}^T(s)\boldsymbol{z}(s)\mathrm{d}s \leqslant \lambda^2\int_0^T \boldsymbol{w}^T(s)\boldsymbol{w}(s)\mathrm{d}s.$$

根据文献[6,7],耗散性概念和微分对策概念适用于理解如何用状态空间法求解以上干扰衰减问题. 这一方法的基本思路为,假定存在 $C^1$ 半正定实储存函数 $V:R^n\rightarrow R$,满足下面耗散不等式

$$V(\boldsymbol{x}(t_1)) - V(\boldsymbol{x}(t_0)) \leqslant \int_{t_0}^{t_1}(\boldsymbol{z}^T(s)\boldsymbol{z}(s) - \lambda^2\boldsymbol{w}^T(s)\boldsymbol{w}(s))\mathrm{d}s. \tag{2}$$

令 $W(\boldsymbol{x}(t))=V(\boldsymbol{x}(t))+\int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{z}^T(s)\boldsymbol{z}(s) - \lambda^2\boldsymbol{w}^T(s)\boldsymbol{w}(s))\mathrm{d}s$, 则有

$$H(t) = \frac{\mathrm{d}W(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{z}^T(t)\boldsymbol{z}(t) - \lambda^2\boldsymbol{w}^T(t)\boldsymbol{w}(t). \tag{3}$$

根据对策论的观点,寻找 $H(t)$ 的鞍点,即 $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*)$,使得

$$H(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}) \leqslant H(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*) \leqslant H(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}^*). \tag{4}$$

如 $H(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*)=0$,则当 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$ 时,外部干扰 $\boldsymbol{w}$ 无论怎么变化,都有

$$H(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}) \leqslant 0.$$

此时,耗散不等式(2)成立,由此易得下面引理.

**引理1.** 假定对系统(1),式(3)表示的函数 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$ 存在鞍点 $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*)$,且有 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*)\leqslant 0$, $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*)$ 为 $x$ 的负定函数,则控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$,使得闭环系统内稳且具有干

扰衰减系数 $\lambda$.

## 3 主要结果

### 3.1 $H^{\infty}$状态反馈设计

问题1. 设计状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}=\alpha(\boldsymbol{x})$,使得闭环系统内稳且具有 $H^{\infty}$ 干扰衰减系数 $\lambda$.

假定1. $H_2^{\mathrm{T}}H_2=I$.

**定理1.** 设系统(1)满足假定1,如果存在矩阵函数 $Q(t):R\to R^{n\times n}$满足

$$Q(t)=[A^1+Q(0)]Q(t),\quad Q(d_1)=A_2, \tag{5}$$

且下面矩阵不等式成立

$$\widetilde{M}=\begin{bmatrix} M+F_2^{\mathrm{T}}F_2-F_2^{\mathrm{T}}H_2H_2^{\mathrm{T}}F_2-F_2^{\mathrm{T}}H_2\overline{B}_1P-P\overline{B}_1H_2^{\mathrm{T}}F_2 & M-F_2^{\mathrm{T}}H_2\overline{B}_1P \\ M-P\overline{B}_1H_2^{\mathrm{T}}F_2 & M \end{bmatrix}<0, \tag{6}$$

其中 $M=P(A+Q(0))+(A+Q(0))^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\lambda^2}PDD^{\mathrm{T}}P-P\overline{B}\overline{B}^{\mathrm{T}}P$, $\overline{B}_1=B_1+e^{-[A_1+Q(0)]d_2}B_2$,则存在状态反馈控制律

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}=-\overline{B}_2^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}-H_2^{\mathrm{T}}F_2\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-d_1}^{t}Q(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-d_2}^{t}e^{-[A_1+Q(0)]d_2}B_2\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s,\end{cases} \tag{7}$$

使得闭环系统内稳且具有干扰衰减系数 $\lambda$.

证. 令储存函数为 $V=\Sigma^{\mathrm{T}}P\Sigma$,由式(5)可得 $\dot{\Sigma}(t)=(A_1+Q(0))\boldsymbol{\Sigma}(t)+\overline{B}_1\boldsymbol{u}(t)+D\boldsymbol{w}(t)$,故有下面推导

$$\begin{aligned}H(t)=&2\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}[P(A_1+Q(0))\Sigma+B_1\boldsymbol{u}(t)+D\boldsymbol{w}(t)]+(F_2\boldsymbol{x}+H_2\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}(F\boldsymbol{x}+H\boldsymbol{u})-\lambda^2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\\ =&\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}[P(A_1+Q(0))+(A_1+Q(0))^{\mathrm{T}}P-P\overline{B}_1^{\mathrm{T}}\overline{B}_1P+\frac{1}{\lambda^2}PDD^{\mathrm{T}}P]\boldsymbol{\Sigma}+\\ &\boldsymbol{x}(F_2^{\mathrm{T}}F_2-F_2^{\mathrm{T}}H_2H_2^{\mathrm{T}}F_2)\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}F_2^{\mathrm{T}}H_2\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}+(\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}+H_2^{\mathrm{T}}F_2\boldsymbol{x}+\\ &\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}(\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}+H_2^{\mathrm{T}}F_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})-\lambda^2(\boldsymbol{w}-\frac{1}{\lambda^2}D^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}-\frac{1}{\lambda^2}D^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}).\end{aligned} \tag{8}$$

令
$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\Sigma}_1,\quad \boldsymbol{\theta}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\Sigma}_1^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

可得
$$\begin{aligned}H(t)=&\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\widetilde{M}\boldsymbol{\theta}+(\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}+H_2^{\mathrm{T}}F_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}(\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}+H_2^{\mathrm{T}}F_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u})-\\ &\lambda^2(\boldsymbol{w}-\frac{1}{\lambda^2}D^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}-\frac{1}{\lambda^2}D^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}).\end{aligned}$$

显然,鞍点为

$$\boldsymbol{u}^*=\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}-H_2^{\mathrm{T}}F_2\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^*=\frac{1}{\lambda^2}D^{\mathrm{T}}P.$$

又 $H(t,\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{w}^*)=\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\widetilde{M}\boldsymbol{\theta}$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的负定函数,由引理1可知状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}=-\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma}-H_2^{\mathrm{T}}F_2\boldsymbol{x},$$

使得闭环系统内稳且具有干扰衰减系数 $\lambda$.

**推论1.** 设系统满足假定1,如果存在矩阵 $A\in R^{n\times n}$,满足 $A=e^{-(A+A_1)d_1}A_2$和式(6),则

状态反馈控制律式(7),使得闭环系统内稳且具有干扰衰减系数.

证 在上面证明中,令

$$Q(t)=e^{-(A+A_1)(-t+d_1)}A_2,$$

则得

$$Q(0)=A,Q(d_1)=A_2,\dot{Q}(t)=(A+A_1)e^{-(A+A_1)(-t+d_1)}A_2=(Q(0)+A_1)Q(t).$$

余下的证明与证定理1相同.

假定2. 存在一个正实数 $k$,使得对$\forall\ t\geqslant 0$,有$|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant k|\boldsymbol{\Sigma}(t)|$.

**定理2.** 设系统满足假定1和假定2,如果存在矩阵 $A\in R^{n\times n}$,满足 $A=e^{-(A+A_1)d_1}A_2$和正定矩阵 $P>0$,使得下面关于 $P$ 的线性矩阵不等式(9)成立,其中 $s=\lambda_{\max}[F_2^{\mathrm{T}}F_2-F_2^{\mathrm{T}}H_2H_2^{\mathrm{T}}F_2]$. 则状态反馈控制律式(7),使得闭环系统稳定且具有干扰衰减系数 $\lambda$.

$$\begin{bmatrix} P(A_1+A)+(A_1+A)^{\mathrm{T}}P+k^2(\frac{1+\varepsilon s}{\varepsilon}) & PD & P\overline{B}_1 \\ D^{\mathrm{T}}P & -\frac{1}{\lambda^2}I & 0 \\ \overline{B}_1^{\mathrm{T}}P & 0 & -I \end{bmatrix}<0. \tag{9}$$

### 3.2 基于观测器的 $H^\infty$输出反馈设计

问题2. 设计如下基于观测器的输出反馈

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A_1\boldsymbol{x}(t)+A_2\boldsymbol{x}(t-d)+B_1\boldsymbol{u}(t)+B_2\boldsymbol{u}(t-d)+L(\boldsymbol{y}-F_1\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{u}=\alpha(\boldsymbol{x}),\end{cases} \tag{10}$$

使得闭环系统内稳且具有干扰衰减系数 $\lambda$.

**定理3.** 设原系统满足假定1,如果存在实数 $\varepsilon>0$,矩阵 $A\in R^{n\times n}$,$A=e^{-(A+A_1)d_1}A_2$及正定矩阵 $P,Q_1,Q_2>0$及适维矩阵 $L$,满足下面矩阵不等式

$$\widetilde{M}=\begin{bmatrix} M+F_2^{\mathrm{T}}F_2-F_2^{\mathrm{T}}H_2H_2^{\mathrm{T}}F_2-F_2^{\mathrm{T}}H_2\overline{B}_1P-P\overline{B}_1H_2^{\mathrm{T}}F_2 & M-F_2^{\mathrm{T}}H_2\overline{B}_1P \\ M-P\overline{B}_1H_2^{\mathrm{T}}F_2 & M\end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

其中
$$M=P(A+Q(0))+(A+Q(0))^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\lambda^2}PDD^{\mathrm{T}}P-P\overline{B}\overline{B}^{\mathrm{T}}P,$$
$$\overline{B}_1=B_1+e^{-[A_1+Q(0)]d_2}B_2.$$

则存在如式(10)所示基于观测器的输出反馈控制律

$$\boldsymbol{u}=-\overline{B}_2^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{\Sigma},$$
$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-d_1}^{t}e^{-[A_1+A](s-t+d_1)}A_2\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-d_2}^{t}e^{-[A_1+A](s-t+d_2)}B_2\boldsymbol{u}(s)\mathrm{d}s, \tag{12}$$

使得闭环系统内稳且具有干扰衰减系数 $\lambda$.

假定3. 存在一个正实数 $k$,使得对$\forall\ t\geqslant 0$,有$|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant k|\boldsymbol{\Sigma}(t)|$.

**定理4.** 设系统满足假定1和假定3且 $H_1H_1^{\mathrm{T}}>0$,如果存在实数 $\varepsilon>0$,矩阵 $A\in R^{n\times n}$,$A=e^{-(A+A_1)d_1}A_2$及正定矩阵 $P,Q_1,Q_2>0$,满足下面 Riccati 方程及关于 $P,Q_1,Q_2$的线性矩阵不等式

$$T_1=P(A_1+A)+(A_1+A)^{\mathrm{T}}P-P\overline{B}_1\overline{B}_1^{\mathrm{T}}P+\frac{1}{\lambda^2}PLH_1H_1^{\mathrm{T}}LP+$$
$$k^2(\varepsilon+\lambda_{\max}[F_2^{\mathrm{T}}F_2])I<0,$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} (A_1 - LF_1)^{\mathrm{T}}Q_1 + Q_1(A_1 - LF_1) + Q_2 + \frac{1}{\varepsilon}F_2^{\mathrm{T}}F_2F_2^{\mathrm{T}}F_2 + F_2^{\mathrm{T}}F_2 & Q_1A_2 & Q_1(D - LH_1) \\ A_2^{\mathrm{T}}Q_1 & -Q_2 & 0 \\ (D - LH_1)^{\mathrm{T}}Q & 0 & -\lambda^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

其中

$$\overline{B}_1 = B_1 + e^{-[A_1+A]d_2}B_2, L = \lambda^2(H_1H_1^{\mathrm{T}})^{-1}(F_1Q_1^{-1} + H_1D^{\mathrm{T}}).$$

则存在如式(10),(12)所示基于观测器的输出反馈控制律,使得闭环系统内稳且具有干扰衰减系数 $\lambda$.

# 4 结论

本文考虑的线性定常系统同时具有状态时滞和输入时滞. 对这类系统,为减少保守性,在进行状态反馈和基于观测器的输出反馈设计时,选用了带积分项的系统储存函数,分别得到了与时滞相关的状态反馈和基于观测器的输出反馈存在的充分条件,在进一步的推导中,部分结果可以转化为用线性矩阵不等式和 Riccati 方程来表示. 由于 LMI 已有有效的快速内点算法及相应的求解工具,Riccati 方程也可求解,所以考虑的部分问题能求出其数值解. 另一方面,由于得到的可解条件是充分条件,仍有一定的保守性,因此,仍有待于进一步改进. 有关这类系统有不确定性时的鲁棒 $H^\infty$控制问题,显然超出了本文的范围,留作下一步研究的课题.

## 参 考 文 献


1 He Jian-Bo, Wang Qing-Guo, Lee Tong-Heng. $H^\infty$ disturbance attenuation for state delayed systems. *Systems and Control Letters*, 1998, **33**(2): 105～114

2 Li Xi, Carlos E De Souza. Delay-dependent stability and stabilization of uncertain linear delay systems: A linear matrix inequalities approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **AC-42**(8): 1144～1148

3 Han Ho Choi, Myung Jin Chung. Memoryless $H^\infty$ controllers design for linear systems with delayed state and control. *Automatica*, 1995, **31**(6): 917～919

4 Trinh H, Alden M. On robustness and stabilization of linear systems with delayed nonlinear perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1997, **AC-42**(7): 1005～1007

5 Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balkrishnan V. Linear Matrix Inequalities in system and control theory. SIAM, Philadelphia, PA, 1994

6 Isidori A, Astolfi A. Disturbance attenuation and control via measurement feedback in nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **AC-37**(9): 1283

7 Willems J C. Dissipative dynamical systems, part Ⅰ: General theory, part Ⅱ: Linear systems with quadratic supply rates. *Arch. Rat. Mech. Anal*, 1972, **45**(5): 321～393



**胡中骥**　1973年生,上海交通大学自动化系博士研究生. 主要研究方向为鲁棒控制、LMI.

**施颂椒**　1933年生,上海交通大学自动化系教授、博士生导师. 主要研究方向为鲁棒控制、自适应控制及其应用等.

**翁正新**　1968年生,上海交通大学自动化系副教授、博士. 主要研究方向为鲁棒控制、模糊控制及其应用等.