第26卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 26, No. 2
2000年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 2000

短文

广义系统ARMA最优递推状态估值器[1)]

邓自立 郭金柱 许 燕
(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080)
(E-mail: dzl@hlju.edu.cn)

摘 要 应用现代时间序列分析方法，基于ARMA新息模型和白噪声估值器，由非递推状态估值器的递推变形，提出了广义系统的ARMA稳态最优递推状态估值器. 它们具有Wiener滤波器形式，可处理带奇异状态转移阵和/或带相关噪声的广义系统，可统一处理滤波、平滑和预报问题，且可统一处理广义和非广义系统状态估计问题. 仿真例子说明了其有效性.

关键词 广义系统，广义ARMA状态估值器，广义Wiener状态滤波器，现代时间序列分析方法.

ARMA OPTIMAL RECURSIVE STATE ESTIMATORS FOR DESCRIPTOR SYSTEMS

DENG Zili GUO Jinzhu XU Yan
(*Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin* 150080)

Abstract Using the modern time series analysis method, based on ARMA innovation model and white noise estimators, and by recursive version of non-recursive state estimators, the ARMA steady state optimal recursive state estimators are presented for descriptor systems which have a Wiener filter form. They can handle the descriptor systems with singular state transition matrices and/or with correlated noises, can handle the filtering, smoothing and prediction problems in a unified form, and can handle the state estimation problems of descriptor and non-descriptor systems in a unified framework. A simulation example shows their effectiveness.

Key words Descriptor systems, descriptor ARMA state estimators, descriptor Wiener state filters, modern time series analysis method.

---

1)国家自然科学基金(69774019)资助项目.
收稿日期 1999-02-26 收修改稿日期 1999-05-20

1 引言

广义系统在电网络、经济、机器人等领域经常遇到. 文献[1]提出了一种非递推广义状态预报器,其缺点是不便于实时计算,没有解决滤波和平滑问题,要求状态转移阵非异,且不能处理相关噪声. 本文用现代时间序列分析方法[2]提出的广义 ARMA 状态估值器是一种新的 Wiener 状态滤波器[3],克服了上述缺点. 考虑广义系统[3]

$$Mx(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t), \tag{2}$$

其中 t 为离散时间,状态 $x(t)\in R^n$,观测 $y(t)\in R^m$,M,Φ,Γ 为常阵. 设 M 为奇异方阵,且系统是正则的,即 $\det(zM-\Phi)\neq 0, \forall\ z\in C$. 设 $w(t)\in R^r$,$v(t)$是带零均值的相关白噪声:

$$\mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^{\mathrm{T}}(j) & v^{\mathrm{T}}(j) \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^{\mathrm{T}} & Q_v \end{bmatrix}\delta_{tj}, \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^{\mathrm{T}} & Q_v \end{bmatrix} > 0, \tag{3}$$

其中 E 为均值号,T 为转置号,$\delta_{tt}=1,\delta_{tj}=0(t\neq j)$. 设系统是完全可观的,即$\forall\ z\in C$ 有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} zM-\Phi \\ H \end{bmatrix} = n, \qquad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} M \\ H \end{bmatrix} = n. \tag{4}$$

问题是基于观测$(y(t+N),y(t+N-1),\cdots)$求状态 $x(t)$的稳态最优(线性最小方差)估值器 $\hat{x}(t|t+N)$,它具有以 $y(t+N)$作为输入的 ARMA 递推形式,亦称其为广义 Wiener 状态滤波器. 对 $N=0,N>0$或 $N<0$,称其为广义 ARMA 状态滤波器、平滑器或预报器.

2 广义 ARMA 递推状态估值器

由(1),(2)有 $y(t)=H(M-q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1}w(t)+v(t)$,其中 q^{-1}为单位滞后算子. 引入左素分解

$$H(M-q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1} = A^{-1}Bq^{r_0}, \tag{5}$$

其中 A,B 为形如 $X=X(q^{-1})=X_0+X_1q^{-1}+\cdots+X_{n_x}q^{-n_x}$的多项式矩阵,$X_i$ 为系数阵,$n_x=\deg(X)$为阶次,r_0为整数,$A_0=I_m,B_0\neq 0,qw(t)=w(t+1)$,则有 ARMA 新息模型[3]

$$Ay(t) = D\varepsilon(t), \tag{6}$$

其中 $D\varepsilon(t)=Bq^{r_0}w(t)+Av(t)$,$D$ 是稳定的,$D_0=I_m$,新息 $\varepsilon(t)$是零均值、方差阵为 Q_ε 的白噪声. D,Q_ε 可用 Gevers 和 Wouters[2]算法求得.

引理1[3]. 最优白噪声估值器为

$$\hat{w}(t|t+N) = L_N\tilde{A}\tilde{D}^{-1}y(t+N), \quad \hat{v}(t|t+N) = M_N\tilde{A}\tilde{D}^{-1}y(t+N), \tag{7}$$

其中 $\tilde{A},\tilde{D}$ 由如下右素分解决定,

$$D^{-1}A = \tilde{A}\tilde{D}^{-1} \tag{8}$$

带 $\tilde{D}_0=I_m$,且定义 $L_N=M_N=0(N<-(\tau\vee 0))$;当 $N\geq -(\tau\vee 0)$

$$L_N = [Q_wF_N^* + SG_N^*]Q_\varepsilon^{-1}q^{-N}, \quad M_N = [Q_vG_N^* + S^{\mathrm{T}}F_N^*]Q_\varepsilon^{-1}q^{-N}, \tag{9}$$

$$F_N^* = \sum_{i=-(r_0\vee 0)}^{N} F_{i+(r_0\vee 0)}^{\mathrm{T}}q^i, \qquad G_N^* = \sum_{i=-(r_0\vee 0)}^{N} G_{i+(r_0\vee 0)}^{\mathrm{T}}q^i, \tag{10}$$

其中定义$(a\vee b)=\max(a,b)$,且 F,G_i 可递推计算为

$$F_i = -D_1F_{i-1} - \cdots - D_{n_d}F_{i-n_d} + \overline{B}_i; F_i = 0(i<0);\quad \overline{B}_i = 0(i>n_{\bar{b}}),\tag{11}$$

$$G_i = -D_1G_{i-1} - \cdots - D_{n_d}G_{i-n_d} + \overline{A}_i; G_i = 0(i<0);\quad \overline{A}_i = 0(i>n_{\bar{a}}),\tag{12}$$

其中定义 $\overline{B}=Bq^{(r_0\wedge 0)}$,$\overline{A}=Aq^{(-r_0\wedge 0)}$,$(a\wedge b)=\min(a,b)$.

引理2[3]. $y(t+i)$有Åström 预报器

$$\hat{y}(t+i|t) = J_i\widetilde{D}^{-1}y(t),\tag{13}$$

其中 J_i 由下式决定

$$\widetilde{D} = E_i\widetilde{A} + q^{-i}J_i\quad (i>0),\quad J_i = \widetilde{D}q^i\quad (i\leqslant 0),\tag{14}$$

带 $\deg(E_i)=i-1$,$\deg(J_i)=\max(n_{\tilde{a}}-1,n_{\tilde{d}}-i)$.

在(4)式中取 $z=0$有 $\mathrm{rank}[\Phi^{\mathrm{T}},H^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=n$,于是由文献[4]存在 $n\times m$ 阵 T_0使$(\Phi+T_0H)$为非异阵. T_0可用文献[4]方法求,也可用凑试法得到. 特别若 Φ 为非异阵,则可取 $T_0=0$. 用 T_0左乘(2)后再与(1)式相加可引出反向递推关系

$$x(t) = \Psi x(t+1) + \Psi_1 y(t) - \Psi_1 v(t) - \Psi_2 w(t),\tag{15}$$

其中定义

$$\Psi = (\Phi+T_0H)^{-1}M,\quad \Psi_1 = (\Phi+T_0H)^{-1}T_0,\quad \Psi_2 = (\Phi+T_0H)^{-1}\Gamma.\tag{16}$$

引理3. (Ψ,H)为完全可观时.

证明. $\forall z\in C,z\neq 0$,应用(4)式有

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}\begin{bmatrix} zI_n-\Psi \\ H\end{bmatrix} &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} zI_n-(\Phi+T_0H)^{-1}M \\ H\end{bmatrix} = \\
&\mathrm{rank}\left\{\begin{bmatrix}(\Phi+T_0H) & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} zI_n-(\Phi+T_0H)^{-1}M \\ H\end{bmatrix}\right\} = \\
&\mathrm{rank}\begin{bmatrix} z(\Phi+T_0H)-M \\ H\end{bmatrix} = \\
&\mathrm{rank}\left\{\begin{bmatrix}-zI_n & zT_0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z^{-1}M-\Phi \\ H\end{bmatrix}\right\} = \\
&\mathrm{rank}\begin{bmatrix} z^{-1}M-\Phi \\ H\end{bmatrix} = n.
\end{aligned}\tag{17}$$

对 $z=0$应用(4)式有

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}\begin{bmatrix} -\Psi \\ H\end{bmatrix} &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -(\Phi+T_0H)^{-1}M \\ H\end{bmatrix} = \\
&\mathrm{rank}\left\{\begin{bmatrix}-(\Phi+T_0H)^{-1} & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} M \\ H\end{bmatrix}\right\} = \\
&\mathrm{rank}\begin{bmatrix} M \\ H\end{bmatrix} = n.
\end{aligned}\tag{18}$$

故(Ψ,H)为完全可观时.

记可观阵为 $\Omega=[H^{\mathrm{T}},(H\Psi)^{\mathrm{T}},\cdots,(H\Psi^{\beta-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,$\beta$ 为可观性指数,将伪逆 $\Omega^{\#}$分块表示为

$$\Omega^{\#} = (\Omega^{\mathrm{T}}\Omega)^{-1}\Omega^{\mathrm{T}} = [\Omega_0,\Omega_1,\cdots,\Omega_{\beta-1}],\tag{19}$$

类似于文献[3]的推导有非递推最优状态估值器

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+N)=\sum_{i=0}^{\beta-1}\Omega_i\{\hat{\boldsymbol{y}}(t-i|t+N)-\sum_{j=0}^{i-1}H\Psi^{i-1-j}[\Psi_1\hat{\boldsymbol{y}}(t-j-1|t+N)-\Psi_1\hat{\boldsymbol{v}}(t-j-1|t+N)-\Psi_2\hat{\boldsymbol{w}}(t-j-1|t+N)]-\hat{\boldsymbol{v}}(t-i|t+N)\},\tag{20}$$

其中规定 $\Psi^i=0(i<0)$且 $j\geqslant 0$.

定理. 广义系统(1)—(2)有渐近稳定的稳态最优 ARMA 递推状态估值器.

$$\overline{D}_N\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+N)=\overline{K}_N\boldsymbol{y}(t+N),\tag{21}$$

带 $\overline{D}_{N0}=I_n$,$\overline{D}_N$,$\overline{K}_N$ 由如下左素分解决定

$$\overline{D}_N^{-1}\overline{K}_N=K_N\widetilde{D}^{-1},\tag{22}$$

其中 $\widetilde{A}$,$\widetilde{D}$ 由(8)式定义,K_N 定义为

$$K_N=\sum_{i=0}^{\beta-1}\Omega_i\{J_{-i-N}-\sum_{j=0}^{i-1}H\Psi^{i-1-j}[\Psi_1J_{-j-1-N}-\Psi_1M_{N+j+1}\widetilde{A}-\Psi_2L_{N+j+1}\widetilde{A}]-M_{N+i}\widetilde{A}\}.\tag{23}$$

证明. 将式(7),(13)代入式(20)有

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+N)=K_N\widetilde{D}^{-1}\boldsymbol{y}(t+N),\tag{24}$$

其中 K_N 由式(23)定义. 将式(22)代入式(24)得式(21). 由 D 的稳定性和式(8)引出 $\widetilde{D}$ 是稳定的,进而由式(22)有 $\overline{D}_N$ 是稳定的. 故式(21)是渐近稳定的.

推论1. 对非广义系统($M=I_n$),定理仍成立.

推论2. 广义系统(1)—(2)有 ARMA 状态估值器

$$\det\widetilde{D}\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+N)=K_N\mathrm{adj}\widetilde{D}\boldsymbol{y}(t+N).\tag{25}$$

推论3. 对单输出广义系统(1)—(2)有 ARMA 状态估值器

$$D\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+N)=K_N\boldsymbol{y}(t+N).\tag{26}$$

3 仿真例子

考虑广义系统(1)—(2),其中 $\boldsymbol{x}(t)=[x_1(t),x_2(t)]^{\mathrm{T}}$,$w(t)$,$\xi(t)$是零均值、方差各为 $\sigma_w^2=1$,$\sigma_\xi^2=1$的独立白噪声,$v(t)=0.5w(t)+\xi(t)$,

$$M=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \Phi=\begin{bmatrix}0.75&0\\-1&0.5\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix},\quad H=[0\quad 1].\tag{27}$$

可得 ARMA 新息模型为

$$(1-0.75q^{-1})y(t)=(1-0.207q^{-1})\varepsilon(t).\tag{28}$$

取 $N=0$,由推论3有广义 ARMA 状态滤波器

$$(1-0.207q^{-1})\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)=K_0\boldsymbol{y}(t),\tag{29}$$

其中 $K_0=[0.204,0.408]^{\mathrm{T}}+[0.118,0.237]^{\mathrm{T}}q^{-1}$. 仿真结果如图1和图2所示.

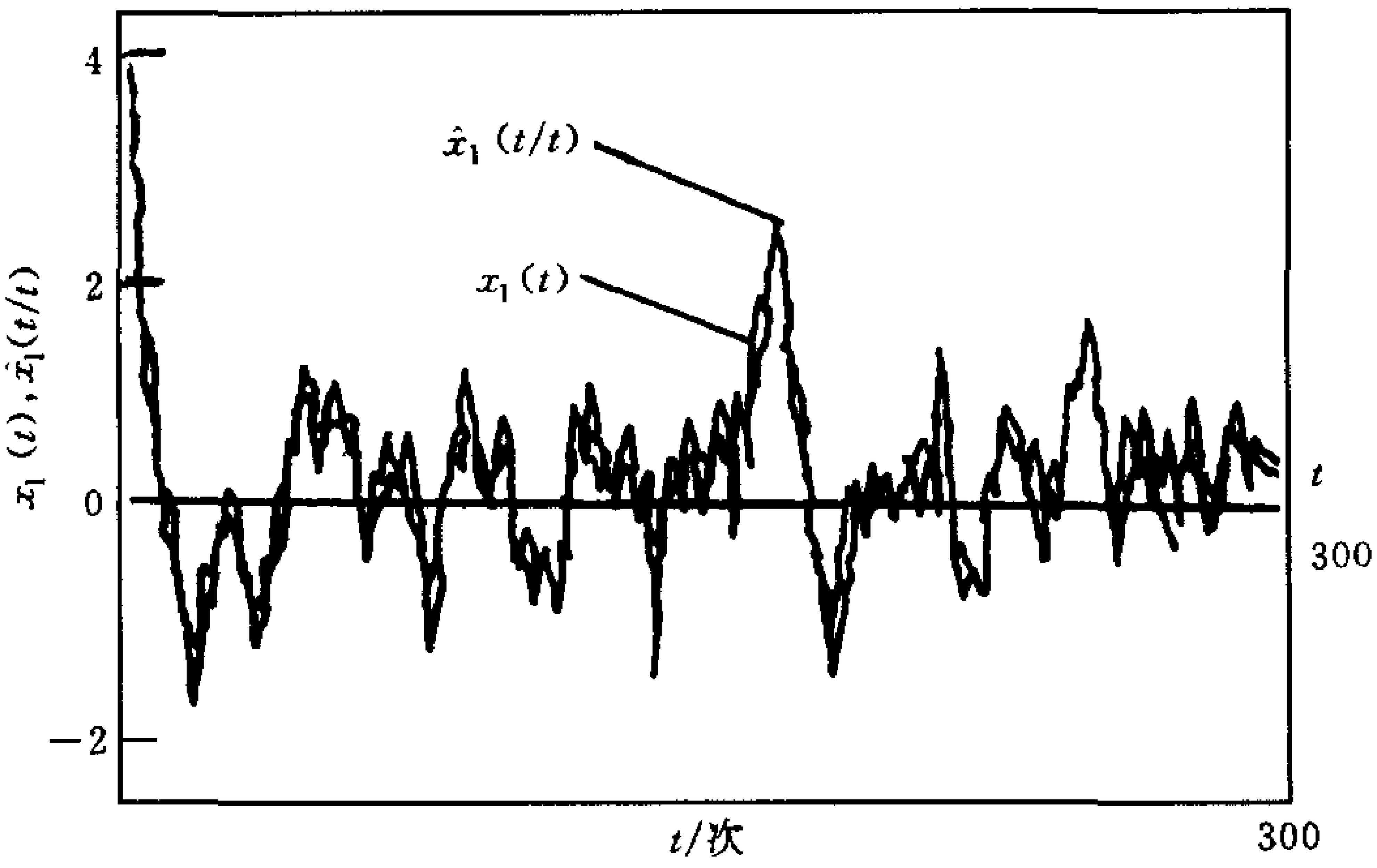

图1 $x_1(t)$和广义 ARMA 状态滤波器 $\hat{x}_1(t|t)$

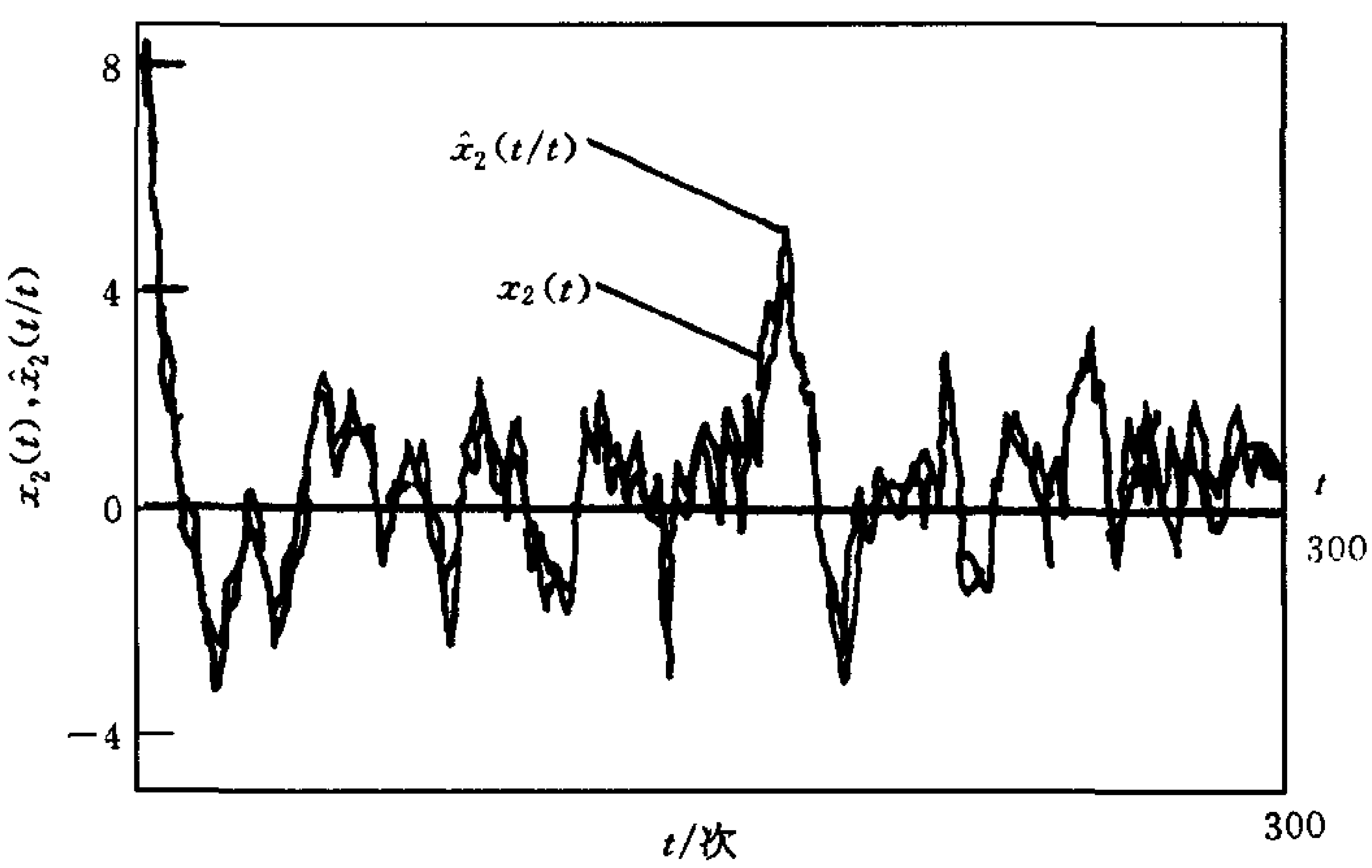

图2 $x_2(t)$和广义 ARMA 状态滤波器 $\hat{x}_2(t|t)$

参 考 文 献

1 张焕水,邓自立. 广义离散随机线性系统自校正最优预报器. 自动化学报,1996,**22**(1):49～57

2 Deng Z L, Zhang H S, Liu S J, Zhou L. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems. *Automatica*,1996,**32**(2):199～216

3 邓自立,许燕. 一种统一的 Wiener 状态估值器. 信息与控制,1998,**27**(5):336～341

4 王跃云,金钟骥,张钟俊. 广义系统的反馈控制与极点配置方法. 自动化学报,1988,**14**(4):285～288

邓自立 1938年生,黑龙江大学教授. 研究领域为状态估计、最优滤波、信号处理.

郭金柱 1955年生,黑龙江大学自动化系副教授. 研究领域为信号处理、系统仿真.

许 燕 女,1965年生,黑龙江大学自动化系副教授. 研究领域为广义系统、最优滤波.