第 26 卷 第 4 期
2000 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 26, No. 4
Jul., 2000

短文

降阶函数观测器的参数化[1)]

高志伟
（天津大学自动化系 天津 300072）

摘 要 给出了线性系统函数观测器的一个新的参数化表示，并分析了其物理意义及状态空间解释. 本文得到的函数观测器的阶数比已往的结果降低了系统的输出数.

关键词 Luenberger 状态观测器，函数观测器，观测器参数化.

PARAMETRIZATION OF REDUCED-ORDER FUNCTION OBSERVERS FOR LINEAR SYSTEMS

GAO Zhiwei
(*Department of Automation, Tianjin University, Tianjin* 300072)

Abstract On the basis of Luenberger state observers, a new parametrization of all function observers for linear systems is presented. The physical significance and the state-space realization of this parametrization are also analyzed in detail. The order of the class of all function observers is minimal, which is lower than the known one.

Key words Luenberger state observers, function observers, observer parametrization.

1 引言

自从 Luenberger[1]创立用于状态估计的观测器理论以来，由于它的实用性及其与基本系统概念的密切联系，观测器设计理论至今仍是一个成果丰硕的研究领域，并在许多不同的研究方向有重要进展. 近年来，基于稳定因式理论的参数化技术已开始被用于观测器的综合和设计. 文[2]基于文[3]给出的双互质分解，给出了函数观测器的一个参数化结果，提出了输入扰动系统最优鲁棒函数观测器的一个设计方法. 无疑，文[2]的结果是很有意义的. 然而，文[2]给出的有关观测器的结果都是针对全阶观测器的，而且基于

1)国家自然科学基金资助课题(No. 69874027).
收稿日期 1998-10-28 收修改稿日期 1999-08-02

双互质分解[3]进行分析,使推导过程较为繁琐.一般说来,在不破坏系统稳定性和/或降低控制性能的前提下,观测器的阶数越低越好.为此,本文将从降阶观测器的角度,进一步讨论函数观测器的参数化问题.本文在分析中,将不使用现有的任何一种双互质分解[3~5],以使结果的推导更为直观.

2 问题描述

考虑如下带有前通项的线性时不变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t), \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{w}(t) = F\boldsymbol{x}(t), \tag{1c}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathscr{R}^n$,$\boldsymbol{u}(t)\in\mathscr{R}^m$,$\boldsymbol{y}(t)\in\mathscr{R}^p$ 和 $\boldsymbol{w}(t)\in\mathscr{R}^k$ 分别为状态向量,输入向量,输出向量以及将被估计的状态向量的线性组合.为了使讨论有意义,通篇假设(A,C)是能观对且 $\mathrm{rank}(C)=p$.

系统(1)的输入输出描述为

$$\boldsymbol{y}(s) = [C(sI-A)^{-1}B+D]\boldsymbol{u}(s) =: \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]_T \boldsymbol{u}(s), \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{w}(s) = F\boldsymbol{x}(s). \tag{2b}$$

显然,能够用于构造观测器的可能的量测,只能是控制输入 $\boldsymbol{u}$ 和量测输出 $\boldsymbol{y}$. 因此,函数观测器的一般形式可描述为

$$\hat{\boldsymbol{w}}(s) = \widetilde{L}_1(s)\boldsymbol{u}(s) + \widetilde{L}_2(s)\boldsymbol{y}(s), \tag{3}$$

其中 $\widetilde{L}_1(s)\in\mathscr{RH}_\infty^{k\times m}$,$\widetilde{L}_2(s)\in\mathscr{RH}_\infty^{k\times p}$,$\mathscr{RH}_\infty$表示真稳定有理函数的集合,$\mathscr{RH}_\infty^{k\times p}$表示所有元素都在 $\mathscr{RH}_\infty$中的 $k\times p$ 阶矩阵.

定义 1. 如果对于所有控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$和初始状态,都有

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{w}(t)-\hat{\boldsymbol{w}}(t))=0,$$

则称式(3)描述的 $\hat{\boldsymbol{w}}(s)$为 $F\boldsymbol{x}(s)$的线性函数观测器.

因为(A,C)是能观对,那么可对系统(1a)~(1c)构造如下$(n-p)$阶 Luenberger 观测器[6]

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{z}}(t) = R\boldsymbol{z}(t) + S\boldsymbol{y}(t) + H\boldsymbol{u}(t), \\ \hat{\boldsymbol{x}}(t) = \theta\boldsymbol{z}(t) + \varphi\boldsymbol{y}(t) - \varphi D\boldsymbol{u}(t),\end{cases} \tag{4}$$

其中

$$R \text{ 为稳定矩阵}, \tag{5a}$$

$$TA - RT = SC, \tag{5b}$$

$$TB - H = SD, \tag{5c}$$

$$\begin{pmatrix} C \\ T \end{pmatrix}^{-1} := (\varphi \quad \theta). \tag{5d}$$

事实上,式(5a)意味着$(sI-R)^{-1}\in(\mathscr{RH}_\infty\cap\mathscr{R}_{sp})^{(n-p)\times(n-p)}$,其中 $\mathscr{R}_{sp}$表示严格真有理函数的集合.由(5b)~(5d)易得 $R=TA\theta$,$S=TA\varphi$ 和 $H=T(B-A\varphi D)$.

3 主要结果

定理 1. 考虑能观的系统(1a)～(1c). 选择矩阵 $R\in\mathcal{R}^{(n-p)\times(n-p)}$ 使得 $(sI-R)^{-1}\in(\mathcal{RH}_\infty\cap\mathcal{R}_{sp})^{(n-p)\times(n-p)}$,且 R 满足约束(5b)～(5d),定义

$$\Delta(s)=sI-R=sI-TA\theta,\tag{6a}$$

$$Z_0(s)=F\theta\Delta^{-1}(s)T,\tag{6b}$$

$$L_0(s)=F\theta\Delta^{-1}(s)TA\varphi+F\varphi,\tag{6c}$$

$$W_z(s)=-CA\theta\Delta^{-1}(s)T-C,\tag{6d}$$

$$W_l(s)=-CA\theta\Delta^{-1}(s)TA\varphi+sI-CA\varphi,\tag{6e}$$

则状态向量 $\boldsymbol{x}$ 的线性组合 $F\boldsymbol{x}$ 的函数观测器(3)可用如下参数化形式来描述:

$$\widetilde{L}_1(s)=(Z_0(s)B-L_0(s)D)+Q(s)(W_z(s)B-W_l(s)D),\tag{7}$$

$$\widetilde{L}_2(s)=L_0(s)+Q(s)W_l(s),\tag{8}$$

$$Q(s)\in(\mathcal{RH}_\infty\cap\mathcal{R}_{sp})^{k\times p}\ \text{为自由参数}.\tag{9}$$

证明. 把式(6)～(8)代入式(3),并整理有

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{w}}(s)=&\widetilde{L}_1(s)\boldsymbol{u}(s)+\widetilde{L}_2(s)\boldsymbol{y}(s)=\\&F\hat{\boldsymbol{x}}(s)+Q(s)(-CA\hat{\boldsymbol{x}}(s)+\\&s\boldsymbol{y}(s)-sD\boldsymbol{u}(s)-CB\boldsymbol{u}(s))=\\&F\hat{\boldsymbol{x}}(s)+Q(s)CA(\boldsymbol{x}(s)-\hat{\boldsymbol{x}}(s)),\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}(s)$是(4)的频域表示.

用式(2b)减去式(10),则

$$\boldsymbol{w}(s)-\hat{\boldsymbol{w}}(s)=(F-Q(s)CA)(\boldsymbol{x}(s)-\hat{\boldsymbol{x}}(s)).\tag{11}$$

因为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的状态估计,且$(F-Q(s)CA)\in\mathcal{RH}_\infty^{k\times n}$, 则由式(11)立即有

$$\lim_{t\to\infty}(\boldsymbol{w}(t)-\hat{\boldsymbol{w}}(t))=0.$$

证毕.

根据线性分式转换(LFT),这里得到的函数观测器参数化可进一步用下面的定理表述.

定理 2. 线性函数观测器参数化(6)～(9)有如下结构:

$$\widetilde{L}(s):=(\widetilde{L}_1(s),\ \widetilde{L}_2(s))=\mathcal{F}_l(J_o,\ Q(s)),\tag{12}$$

$$Q(s)\in(\mathcal{RH}_\infty\cap\mathcal{R}_{sp})^{k\times p},\tag{13}$$

$$J_o=\left[\begin{array}{c|ccc}TA\theta & T(B-A\varphi D) & TA\varphi & 0\\\hline F\theta & -F\varphi D & F\varphi & I\\-CA\theta & -(CB+(sI-CA\varphi)D) & (sI-CA\varphi) & 0\end{array}\right]_T.\tag{14}$$

这里 $\mathcal{F}_l$ 表示以 $Q(s)$作为反馈元素的线性分式转换(LFT).

证明. 因为 $\boldsymbol{r}(s):=s\boldsymbol{y}(s)-sD\boldsymbol{u}(s)-C(A\hat{\boldsymbol{x}}(s)+B\boldsymbol{u}(s))$,则由式(10)立即可得.

定理 3. 线性函数观测器参数化(6)～(9)的状态空间实现为

$$\widetilde{L}(s)=(\widetilde{L}_1(s),\ \widetilde{L}_2(s))=$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}A_q & -B_qCA\theta & -B_qC(B-A\varphi D)-A_qB_qD & A_qB_q-B_qCA\varphi\\0 & TA\theta & T(B-A\varphi D) & TA\varphi\\\hline C_q & F\theta & -(F\varphi+C_qB_q)D & F\varphi+C_qB_q\end{array}\right]_T,\tag{15}$$

其中$\begin{bmatrix} A_q & B_q \\ C_q & 0 \end{bmatrix}_T$为自由参数$Q(s)\in(\mathscr{RH}_\infty\cap\mathscr{R}_{sp})^{k\times p}$的一个状态空间实现，$A_q\in\mathscr{R}^{q\times q}$为稳定矩阵.

证明. 把式(6a)～(6e)和$\left(I_k,\quad Q(s)\right)=\begin{bmatrix} A_q & 0 & B_q \\ C_q & I_k & 0 \end{bmatrix}_T$代入式(7)和(8)，整理易得.

4 几点说明

1)从定理1和定理2可以看出，当取$Q(s)=0, F=I_k$，这里得到的函数观测器(6)～(9)就退化为Luenberger最小阶状态观测器(4). 这意味着线性函数观测器的参数化(6)～(9)(或(12)～(14))是基于最小阶状态观测器(4)的设计，并包含一个内部反馈环构成的动态系统，这个内部反馈环是以严格真且稳定的自由参数$Q(s)$作为反馈元素的. 估计误差$\boldsymbol{r}:=s\boldsymbol{y}(s)-sD\boldsymbol{u}(s)-C(A\hat{\boldsymbol{x}}(s)+B\boldsymbol{u}(s))$经过$Q(s)\in(\mathscr{RH}_\infty\cap\mathscr{R}_{sp})^{k\times p}$的滤波作用产生附加的输入信号$\boldsymbol{\eta}:=Q(s)\boldsymbol{r}$，再与$F\hat{\boldsymbol{x}}$相加，便构成了一类重构$F\boldsymbol{x}$的函数观测器的集合.

2)从定理3可知，这里得到的函数观测器的阶数$n-p+q$，实际上等于最小阶状态观测器(4)的阶数$n-p$加上自由参数$Q(s)=\begin{bmatrix} A_q & B_q \\ C_q & 0 \end{bmatrix}_T$的阶数$q$. 本文得到的函数观测器的阶数比文[2]的结果($n+q$阶)降低了$p$(系统的输出数). 当然，从进一步降低函数观测器阶数的角度而言，自由参数$Q(s)$的阶数q应选得尽可能小，一般取(A_q, B_q, C_q)为$Q(s)$的最小实现.

3)值得指出的是，本文给出的降阶函数观测器的参数化结果，在输入扰动系统的鲁棒降阶函数观测器的设计中，将有直接的应用.

参 考 文 献

1 Luenberger D G. An introduction to observers, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1971, AC-**16**(3):595～602

2 Ding X, Frank P M, Guo L. Robust observer design via factorization approach. In: Proc. 29th IEEE Conf. Decision and Control, Honolulu, Hawaii, 1990. 3623～3628

3 Nett C N, Jacoboson C A, Balas M J. A connection between state-space and doubly coprime fractional representations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, AC-**29**(9):831～832

4 Hippe P. Modified doubly coprime fractional representations related to the reduced-order observers. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, AC-**34**(5):573～576

5 Gao Z W, Liu B K, Li G Q. New Bezout identity and parameterization of all properly stabilizing normal controllers for singular systems. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 1999, **8**(1):9～21

6 O'Reilly J. Observers for Linear Systems. London: Academic Press Inc., 1983

高志伟 简介见本刊1998年第24卷第6期.