第 17 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 1
1991 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1991

时滞系统控制问题块脉冲算子解的收敛性[1)]

王 行 愚

(华东化工学院，上海)

摘 要

本文给出了一种基于块脉冲算子的离散逼近格式. 应用这种逼近格式，可以获得时滞非线性最优控制问题的块脉冲级数解. 本文证明了这种块脉冲级数解将收敛于这类问题的精确解,并具有一阶收敛速度.

关键词: 时滞系统,最优控制,收敛性,块脉冲算子.

一、引 言

近年来，利用块脉冲函数系来求解各类问题的方法已被广泛地采用. 文献[1]和[2]分别将这种方法用于求解线性和非线性时滞系统的最优控制问题. 但是，用这种方法求得的解仅仅是对精确解的一种近似. 这种近似一般具有双重含义，即一方面原时滞连续系统所描写的控制问题被近似地用一个离散方程描写的逼近问题所代替；另一方面解后一问题又用了近似迭代程序. 因此，这种逼近问题的近似解是否收敛于原始问题的精确解,将成为评价这类方法的关键. 目前,还未见到关于上述问题收敛性的证明.

本文利用块脉冲算子方法[3]给出由非线性时滞系统所描写的，具有一般形式性能指标的,最优控制问题求解的逼近格式,并且证明在一定条件下，所求得的块脉冲级数解将收敛于原问题的精确解,并给出了收敛速度的估计.

二、块脉冲算子简介

块脉冲算子(简记为 BPO) 是由文献[3]提出的,并在[4,5]等文中被完善、发展和应用. 这种算子为块脉冲函数分析方法构造了适当的数学框架，使得能够抽象出一些共性的规律和建立严格的理论基础.

定义 1. 称定义于 $[0,T]$ 上的下列正交函数系 $\{\phi_i(t)\}$ 为块脉冲函数系

本文于 1989 年 6 月 3 日收到.

1) 本研究工作得到国家自然科学基金资助.

$$\phi_i(t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{m}{T}}, & t\in\Delta_i,\ \ i=1,2,\cdots,m.\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

其中 $\Delta_1=\left[0,\frac{T}{m}\right]$; $\Delta_i=\left(\frac{(i-1)T}{m},\ \frac{iT}{m}\right]$, m为自然数.

定义 2. 对任意给定的自然数m和任一函数 $f\in L_2[0,T]$ 定义算子 $\mathscr{B}$ 如下:

$$\mathscr{B}f(t)=F^T\triangleq(f_1,\cdots,f_m).$$

其中 $f_i=\sqrt{\frac{m}{T}}\int_{\Delta_i}f(t)dt$; $L_2[0,T]$ 表示平方可积函数空间. 称$\mathscr{B}$为一维 BPO, $\bar{\mathscr{B}}\triangleq\sqrt{\frac{m}{T}}\mathscr{B}$ 为非规格化块脉冲算子. 对于取矩阵值的函数 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times k}$,定义

$$\mathscr{B}A(t)=(\mathscr{B}a_{ij}(t))_{n\times mk}$$

可以证明$\mathscr{B}$是线性、连续和有界的算子[3]. 在以下的讨论中,约定 $(B)_i$ 表示矩阵B的第i列, $o(1)$ 表示无穷小量, $O(1)$ 表示有界量, $f(m)=O(g(m))$ 表示当 $m\to\infty$ 时, $f(m)/g(m)<K$. 其中 $g(m)>0,K$ 为有限正数. $L_2^k[0,T]$ 表示取值于 R^k 的平方可积函数空间,对任一 $\boldsymbol{h}(x)\in L_2^k[0,T]$ 定义连续模如下:

$$\omega_{\boldsymbol{h}}=\sup_{|x-y|\leqslant\frac{T}{m}}\|\boldsymbol{h}(x)-\boldsymbol{h}(y)\|_{R^k}.$$

$\|\cdot\|_{R^k}$ 表示向量空间 R^k 的欧氏范数. $C_n[0,T]$ 表示取值于 R^n 的连续函数空间.

引理 1[5]. 若 $\boldsymbol{x}(t)\in C_n[0,T]$, 且有有界导数,则

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(\mathscr{B}\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\Phi}(t)-\boldsymbol{x}(t)\|_{R^n}=O\left(\frac{1}{m}\right).\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}(t)=(\phi_1(t),\cdots,\phi_m(t))^T$ 称为块脉冲向量;

$(\mathscr{B}\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\Phi}(t)$ 称为函数 $\boldsymbol{x}(t)$ 的 BPO 逼近.

引理 2[5]. 若 $f\in L_2[0,T]$,且 f 有界,则

$$\left|\left(\bar{\mathscr{B}}\int_0^t f(\tau)d\tau\right)_i-((\bar{\mathscr{B}}f(t))P_m)_i\right|\leqslant\frac{T}{2m}\omega_f.\tag{2}$$

其中

$$P_m=\frac{T}{m}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 1\cdots 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\cdots 1\\ & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots\frac{1}{2}\end{bmatrix}_{m\times m}.$$

P_m 称为积分运算矩阵. 关于它有如下公式:

$$(AP_m)_1=\frac{T}{2m}(A)_1,$$

$$\left.\begin{aligned}(AP_m)_i &= \frac{T}{2m}(A)_i + \frac{T}{m}\sum_{j=1}^{i}(A)_j,\ i=2,\cdots,m,\\ (AP_m)_{i+1} &= (AP_m)_i + \frac{T}{2m}[(A)_{i+1}+(A)_i].\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中 A 为 $n\times m$ 阶实矩阵.

引理 3[3]. 设 $\lambda=\dfrac{(q+\mu)T}{m}$，其中 q 为自然数，$1\leqslant q\leqslant m$，$0\leqslant\mu<1$ 则

$$\mathscr{B}[\boldsymbol{\Phi}(t-\lambda)l(t-\lambda)] = (1-\mu)W_1^q + \mu W_1^{q+1}. \tag{4}$$

其中

$$l(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases},\quad W_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \mathbf{0}\\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \ddots & 1\\ & & & & 0\end{bmatrix}_{m\times m}.$$

三、时滞系统控制问题的 BPO 逼近

考虑如下最优控制问题:

问题 $\mathscr{P}$. 寻求最优控制 $\boldsymbol{u}^*(t)\in L_2^r[0,T]$ 及与其对应的最优状态 $\boldsymbol{x}^*(t)$，使得

$$J(\boldsymbol{u}^*(t)) = \min_{\boldsymbol{u}}\left\{J(\boldsymbol{u}(\cdot)) = S(\boldsymbol{x}(T)) + \int_0^T L(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))dt\right\}, \tag{5}$$

且满足

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\lambda),\boldsymbol{u}(t)),\ t\in[0,T],\\ \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t),\qquad t\in[-\lambda,0].\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$，$\boldsymbol{\phi}(t)\in R^n$，且 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 为 $[-\lambda,0]$ 上的连续函数. $\boldsymbol{f}, L$ 均为变元的连续函数,且有

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\lambda),\boldsymbol{u}(t)) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{y}(t-\lambda),\boldsymbol{v}(t))\|_{R^n}\\ &\leqslant L_1(\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)\|_{R^n} + \|\boldsymbol{x}(t-\lambda)-\boldsymbol{y}(t-\lambda)\|_{R^n} + \|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)\|_{R^r}),\end{aligned} \tag{7}$$

$$|L(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) - L(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})| \leqslant L_2(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_{R^n} + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_{R^r}), \tag{8}$$

$$|S(\boldsymbol{x}(T)) - S(\boldsymbol{y}(T))| \leqslant L_3\|\boldsymbol{x}(T)-\boldsymbol{y}(T)\|_{R^n}. \tag{9}$$

其中 L_1, L_2 和 L_3 均为与变元无关的常数.

为了求解问题 $\mathscr{P}$,利用 BPO 方法将其转化为块脉冲算子象空间中的逼近问题. 为此将方程(6)化为积分方程,并在其两边作用 $\mathscr{B}$ 后,用函数 $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ 的 BPO 逼近代替函数本身,可推导出方程(6)的离散近似表达式. 同理也可将 $J(\boldsymbol{u}(\cdot))$ 形式化为近似代数表达式. 从而,可得到问题 $\mathscr{P}$ 的如下逼近形式.

问题 $\mathscr{P}_m$. 寻求矩阵 $U^*\triangleq[U_1^*\vdots\cdots\vdots U_m^*]$ 和对应的矩阵 $X^*\triangleq[X_1^*\vdots\cdots\vdots X_m^*]$，$U^*\in R^{r\times m}$，$X^*\in R^{n\times m}$,使极小化下列性能指标:

$$J_m(U) = S(X_m) + \frac{T}{m}\sum_{i=1}^{m} L(t_i,X_i,U_i), \tag{10}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{且满足 } X=[\boldsymbol{\phi}(0)\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{\phi}(0)]+FP_m.\\
&\text{或写为递推形式 } \boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{\phi}(0)+\frac{T}{2m}\boldsymbol{F}_1,\\
&\qquad \boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{X}_{i-1}+\frac{T}{2m}[\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{i-1}],i=2,\cdots,m.
\end{aligned}\right\}\tag{11}
$$

$$
U\in\Omega\triangleq\left\{U:\ U\in R^{r\times m},\frac{T}{m}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{U}_i^T\boldsymbol{U}_i<+\infty\right\}.\tag{12}
$$

其中

$$
F_i=\begin{cases}
f(t_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{\phi}(t_i-\lambda),\boldsymbol{U}_i), \quad 1\leqslant i\leqslant q,\\
\mu f(t_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{\phi}((1-\mu)T/m),\boldsymbol{U}_i)+(1-\mu)f(t_i,\boldsymbol{X}_i,(1-\mu)\boldsymbol{X}_1+\mu\boldsymbol{\phi}(0),\boldsymbol{U}_i),\\
\quad i=q+1,\\
f(t_i,\boldsymbol{X}_i,(1-\mu)\boldsymbol{X}_{i-q}+\mu\boldsymbol{X}_{i-q-1},\boldsymbol{U}_i), \quad q+1<i\leqslant m,
\end{cases}
$$

$$
t_i=\frac{iT}{m},\ F\triangleq[\boldsymbol{F}_1\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{F}_m],\ X=[\boldsymbol{X}_1\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{X}_m],U=[\boldsymbol{U}_1\vdots\cdots\vdots\boldsymbol{U}_m].
$$

问题 $\mathscr{P}_m$ 可以用非线性规划等方法求解,对于线性系统可以获得解析解.

四、时滞非线性方程 BPO 解的收敛性

定理 1. 设 $\boldsymbol{u}(t)$ 已知, $\boldsymbol{x}(t)$ 是初值问题(6)的唯一解, X 是当 $U=\mathscr{B}\boldsymbol{u}(t)$ 时,方程(11)的唯一解,则

$$
\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|X\mathscr{B}(t)-\boldsymbol{x}(t)\|_{R^n}\leqslant O(S_m)+O\left(\frac{1}{m}\right),\ (m\to\infty).\tag{13}
$$

其中 $S_m=\omega_f+L_1\omega_u$; $\mathscr{B}(t)=\sqrt{\frac{T}{m}}\,\boldsymbol{\Phi}(t)$. 当 $\boldsymbol{u}(t)$ 可表示为 $\boldsymbol{u}(t)=V(t)\mathscr{B}, V\in R^{r\times m}$ 时, $S_m=\omega_f$;而当 $\boldsymbol{f}$ 不显含 t 时, $S_m=L_1\omega_u$. $X\Phi(t)$ 称为(6)的 BPO 解.

证明. 由压缩映象定理易知当 $m>\frac{TL_1}{2}$ 时,方程(11)可由迭代方法求得唯一解[6]. 因此,关于方程(11)存在唯一解的假设是合理的. 设 $\varepsilon_i=\|(\mathscr{B}\boldsymbol{x})_i-\boldsymbol{X}_i\|_{R^n}$, $\boldsymbol{Z}_i=(\mathscr{B}\boldsymbol{f})_i-\boldsymbol{F}_i$, $\omega_i=\max_{t\in\Delta i}\|\boldsymbol{u}(t)-(\mathscr{B}\boldsymbol{u})_i\|_{R^r}$. 分三种情况估计 $\|\boldsymbol{Z}_i\|_{R^n}$:

(i) 当 $1\leqslant i\leqslant q$ 时,由(7)式易知

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{Z}_i\|_{R^n}&\leqslant\omega_f+\frac{m}{T}\int_{\Delta i}\|\boldsymbol{f}(t_i,\boldsymbol{x}(t_i),\boldsymbol{x}(t_i-\lambda),\boldsymbol{u}(t_i))-\boldsymbol{f}(t_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{\phi}(t_i-\lambda),\boldsymbol{U}_i)\|dt\\
&\leqslant\omega_f+L_1\omega_x+L_1\omega_i+L_1\varepsilon_i.
\end{aligned}\tag{14}
$$

(ii) 当 $i=q+1$ 时,

$$
\|\boldsymbol{Z}_i\|=\frac{m}{T}\left\|\left\{\int_{\frac{qT}{m}}^{\lambda}+\int_{\lambda}^{\frac{(q+1)T}{m}}\right\}\boldsymbol{f}dt-\boldsymbol{F}_{q+1}\right\|.
$$

由积分中值定理并仿式(14)的证法可得

$$
\|\boldsymbol{Z}_{q+1}\|_{R^n}\leqslant\omega_f+(1-\mu)L_1\omega_x+(1-\mu)L_1\omega_{q+1}+(1-\mu)L_1\varepsilon_{q+1}+\eta_1.
$$

其中

$$\eta_1 = L_1 \left\| \boldsymbol{x}\left((1-\mu)\frac{T}{m}\right) - (1-\mu)\boldsymbol{X}_1 - \mu\boldsymbol{\phi}(0) \right\|.$$

由(11)式,积分中值定理和 f 的连续有界性可知 $\eta_1 = O\left(\frac{1}{m}\right)$,且 $\omega_x = O\left(\frac{1}{m}\right)$，所以可得

$$\|\boldsymbol{Z}_{q+1}\|_{R^n} \leqslant \omega_f + (1-\mu)L_1\omega_{q+1} + (1-\mu)L_1\varepsilon_{q+1} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{15}$$

(iii) 当 $q+1 < i \leqslant m$ 时,仿上法可推得

$$\|\boldsymbol{Z}_i\|_{R^n} \leqslant \omega_f + 2L_1\omega_x + L_1\omega_i + L_1\varepsilon_i + \eta_2.$$

其中 $\eta_2 = L_1\|(\mathscr{B}\boldsymbol{x}(t-\lambda))_i - (1-\mu)\boldsymbol{X}_{i-q} - \mu\boldsymbol{X}_{i-q-1}\|_{R^n}$.
由(4)和(1)式可推得

$$\eta_2 \leqslant (1-\mu)L_1\varepsilon_{i-q} + \mu L_1\varepsilon_{i-q-1} + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

由此，

$$\|\boldsymbol{Z}_i\|_{R^n} \leqslant L_1\varepsilon_i + (1-\mu)L_1\varepsilon_{i-q} + \mu L_1\varepsilon_{i-q-1} + S_{mi} + O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{16}$$

其中 $S_{mi} = \omega_f + L_1\omega_i$.

现在估计 ε_i,由(6)和(11)式可得

$$\varepsilon_i \leqslant \left\| \left(\mathscr{B}\int_0^t \boldsymbol{f}d\tau\right)_i - ((\mathscr{B}\boldsymbol{f})P_m)_i \right\| + \|((\mathscr{B}\boldsymbol{f})P_m)_i - (FP_m)_i\|.$$

由式(2)和(3)可得

$$\varepsilon_1 \leqslant \frac{T}{2m}\omega_f + \frac{T}{2m}\|\boldsymbol{Z}_1\|_{R^n},$$

$$\varepsilon_i \leqslant \frac{T}{2m}\omega_f + \frac{T}{2m}\|\boldsymbol{Z}_i\| + \frac{T}{m}\sum_{j=1}^{i-1}\|\boldsymbol{Z}_j\|, \ i = 2,\cdots,m.$$

由(14)—(16)式可得

$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } 1 \leqslant i \leqslant q \text{ 时，} \varepsilon_1 \leqslant \left(1-\frac{TL_1}{2m}\right)^{-1}\frac{T}{m}\rho_{m1}, \\ &\varepsilon_i \leqslant \alpha_m\sum_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j + \left(1-\frac{TL_1}{2m}\right)^{-1}\frac{Tq}{m}\rho_{mi}, \ 2 \leqslant i \leqslant q. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中
$$\alpha_m = \left(1-\frac{TL_1}{2m}\right)^{-1}\frac{TL_1}{m};$$

$$\rho_{mi} = S_{mi} + O\left(\frac{1}{m}\right). \quad \text{令} \rho_m = S_m + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

利用数学归纳法和(17)式可推得

$$\varepsilon_i \leqslant (1+\alpha_m)^q\left(1-\frac{TL_1}{2m}\right)^{-1}\frac{Tq}{m}\rho_m.$$

所以，$\varepsilon_i \leqslant O\left(\frac{1}{m}\right)\rho_m$，$1 \leqslant i \leqslant q$.

同理可证得

$$\varepsilon_{q+1} \leqslant O\left(\frac{1}{m}\right) \rho_m + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

$$\varepsilon_{q+k} \leqslant (1 + 2\alpha_m)^m \left[O(1)\rho_m + O\left(\frac{1}{m}\right)\right], 1 < k \leqslant \min(q, m-q),$$

$$\varepsilon_{q+k} \leqslant (1 + 4\alpha_m)^m \left[O(1)\rho_m + O\left(\frac{1}{m}\right)\right], \ q+1 \leqslant k \leqslant \max(q+1, m-q).$$

综合上述四式可得

$$\varepsilon_i \leqslant (1 + 4\alpha_m)^m \left[O(1)S_m + O\left(\frac{1}{m}\right)\right], \ i = 1, \cdots, m.$$

又因为，$(1 + 4\alpha_m)^m \to e^{4TL_1}(m \to \infty)$，所以有

$$\varepsilon_i \leqslant O(S_m) + O\left(\frac{1}{m}\right), \ i = 1, \cdots, m. \tag{18}$$

另一方面，

$$\|X\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|_{R^n} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \sqrt{\frac{T}{m}}\, \phi_i(t) + \|(\mathscr{B}x)\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|.$$

又由块脉冲函数的定义可知，

$$\sqrt{\frac{T}{m}} \sum_{i=1}^{m} \phi_i(t) \equiv 1,$$

所以由(18)和(1)式可知(13)式成立． 当 $\boldsymbol{u}(t) = V\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)$ 时，$\omega_i \equiv 0$；而当 f 不显含 t 时，在(14),(15)和(16)式中可不出现 ω_f 项．仿照上述证法可推知定理中的结论成立．

五、时滞系统最优控制问题 BPO 解的收敛性

引理 4. 设 $\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)$ 是分别对应于输入为 $\boldsymbol{u}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 时初值问题(6)的解，则存在常数 $D_1 > 0$，使

$$|J(\boldsymbol{u}) - J(\boldsymbol{v})| \leqslant D_1 \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{L_2^r}. \tag{19}$$

证明．由方程(6)和条件(7)可得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|_{R^n} &\leqslant \int_0^t \|\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{x}(\tau-\lambda), \boldsymbol{u}(\tau)) - \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{y}(\tau), \boldsymbol{y}(\tau-\lambda), \boldsymbol{v}(\tau))\| d\tau \\ &\leqslant L_1 \int_0^t \|\boldsymbol{x}(\tau) - \boldsymbol{y}(\tau)\| d\tau + L_1 \int_0^t \|\boldsymbol{x}(\tau-\lambda) - \boldsymbol{y}(\tau-\lambda)\| d\tau \\ &\quad + L_1 \int_0^t \|\boldsymbol{u}(\tau) - \boldsymbol{v}(\tau)\| d\tau \\ &\leqslant 2L_1 \int_0^t \|\boldsymbol{x}(\tau) - \boldsymbol{y}(\tau)\|_{R^n} d\tau + L_1 \sqrt{T} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{L_2^r}.\end{aligned}$$

由 Gronwall's 引理[6]可得

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\|_{R^n} \leqslant D_2 \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{L_2^r}. \tag{20}$$

其中 $D_2 = L_1 \sqrt{T}\, e^{2L_1 T}$.

又由条件(8)和(9)可推得

$$|J(\boldsymbol{u})-J(\boldsymbol{v})| \leqslant L_3\|\boldsymbol{x}(T)-\boldsymbol{y}(T)\|$$
$$+L_2\int_0^T\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)\|dt+L_2\int_0^T\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)\|dt.$$

由(19)式并应用 Schwarz 不等式于上式中最后一项积分后,可得

$$|J(\boldsymbol{u})-J(\boldsymbol{v})| \leqslant D_1\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|_{L_2^r}.$$

其中

$$D_1=L_3D_2+L_2D_2T+L_2\sqrt{T}.$$

引理 5. 设 $U\in\Omega, X$ 是与 U 对应的方程(11)的解,且设

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T}{m}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{U}_i^T\boldsymbol{U}_i<+\infty,$$

则存在函数 $\boldsymbol{u}\in L_2^r[0,T]$ 和与 $\boldsymbol{u}$ 对应的方程(6)的解 $\boldsymbol{x}(t)$, 使得当 $m\to\infty$ 时有

$$\sigma_1\triangleq\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|X\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)-\boldsymbol{x}(t)\|_{R^n}\to 0,$$
$$\sigma_2\triangleq\|U\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)-\boldsymbol{u}(t)\|_{L_2^r}\to 0.$$

证明. 设 $\boldsymbol{U}_j\triangleq(u_{1j},\cdots,u_{rj})^T, \bar{u}_{ij}\triangleq\sqrt{\frac{T}{m}}u_{ij}$, 由题设条件可得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\bar{u}_{ij}^2<+\infty\ (i=1,\cdots,r).$$

由黎斯-费希尔定理[7]可知,存在函数 $u_i(t)\in L_2[0,T]$, 使得 $\bar{u}_{ij}$ 是 $u_i(t)$ 关于块脉冲函数系的 Fourier 级数系数，且满足封闭性公式. 若令 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),\cdots,u_r(t))^T$, 则由封闭性公式可知, $\sigma_2\to 0\ (m\to\infty)$.

设输入为 $U\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)$ 时,式(6)的解为 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$,由(20)式可得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{x}(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\|\leqslant D_2\|\boldsymbol{u}(t)-U\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\|_{L_2^r}.$$

由定理 1 可得　$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|X\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\|_{R^n}\to 0,(m\to\infty).$$

又因为　$$\|\boldsymbol{x}(t)-X\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\|\leqslant\|\boldsymbol{x}(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\|+\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t)-X\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\|,$$

综合上述三个关系式可得 $\sigma_1\to 0(m\to\infty)$.

引理 6. 设 $U\in\Omega$,则

(a) $w_1\triangleq|J_m(U)-J(U\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t))|\to 0,\ (m\to\infty)$.

(b) 当 $L,\boldsymbol{f}$ 均不显含 t 或 $\left|\frac{dL}{dt}\right|$ 和 $\left\|\frac{d\boldsymbol{f}}{dt}\right\|_{R^n}$ 有界时, $w_1=O\left(\frac{1}{m}\right)$.

证明. (a). 由条件(8)和(9)可得

$$|J_m(U)-J(U\bar{\Phi}(t))|\leqslant|S(X_m)-S(\tilde{x}(T))|+\eta_3. \tag{21}$$

其中

$$\eta_3\triangleq\left|\frac{T}{m}\sum_{i=1}^{m}L(t_i,\boldsymbol{X}_i,\ \boldsymbol{U}_i)-\int_0^T L(t,\tilde{\boldsymbol{x}}(t),U\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t))dt;\right.$$
$$\leqslant T\omega_L+L_2\|X\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\|_{R^n}. \tag{22}$$

由 L 的一致连续性可得 $\omega_L=o(1)$, 又由定理 1 可知,

$$w_2 \triangleq \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|X\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\|_{R^n}=o(1),$$

所以 $\eta_3=o(1)$. 再由条件(9)和(21)立即可知结论成立.

(b) 由定理 1 和微分中值定理,在所给条件下可以得到

$$\eta_3=O\left(\frac{1}{m}\right),\quad w_2=O\left(\frac{1}{m}\right) \text{ 和 } \omega_L=O\left(\frac{1}{m}\right).$$

仿(a)证法易知结论成立.

定理 2. 设问题 $\mathscr{P}$ 存在唯一解 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 和 $\boldsymbol{x}^*(t)$, 问题 $\mathscr{P}_m$ 存在唯一解 U^* 和 X^*, 又设 $\hat{\boldsymbol{u}}_m(t)\triangleq U^*\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)$, $\hat{\boldsymbol{x}}_m(t)\triangleq X^*\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)$, 则

(a) $J_m(U^*)\to J(\boldsymbol{u}^*(t))$ $(m\to\infty)$,

(b) 存在子列 $\hat{\boldsymbol{u}}_{m_k}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_{m_k}(t)$,当 $m_k\to\infty$ 时有

$$l_1\triangleq\|\hat{\boldsymbol{u}}_{m_k}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)\|_{L_2^r}=o(1),\quad l_2\triangleq\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\hat{\boldsymbol{x}}_{m_k}(t)-\boldsymbol{x}^*(t)\|_{R^n}=o(1).$$

证明. (a) 因为 $J_m(U^*)-J(\boldsymbol{u}^*(t))\leqslant J_m(\mathscr{B}\boldsymbol{u}^*)-J(\boldsymbol{u}^*(t))\leqslant a_m$, (23)

其中 $a_m\triangleq J_m(\mathscr{B}\boldsymbol{u}^*(t))-J((\mathscr{B}\boldsymbol{u}^*(t))\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t))+J((\mathscr{B}\boldsymbol{u}^*(t))\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t))-J(\boldsymbol{u}^*(t))$.

由引理 6 和引理 4 可得, $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=0$. 由引理 6 可知, $b_m\triangleq J_m(U^*)-J(U^*\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t))=o(1)$. 又因为

$$J_m(U^*)-J(\boldsymbol{u}^*(t))\geqslant b_m, \tag{24}$$

由(23)和(24)式可知结论成立.

(b) 因为

$$h_m\triangleq\int_0^T\hat{\boldsymbol{u}}_m^T(t)\hat{\boldsymbol{u}}_m(t)dt=\frac{T}{m}\sum_{i=1}^m\boldsymbol{U}_i^{*T}\boldsymbol{U}_i^*<+\infty,$$

所以由 Weierstrass 定理[7],必存在子列 h_{m_k},使 $\lim\limits_{m_k\to\infty}h_{m_k}<+\infty$. 由引理 5 可知, 存在 $\bar{\boldsymbol{u}}\in L_2^r[0, T]$ 和与之对应的(6)式的解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$, 使 $\bar{\sigma}_1\triangleq\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|X\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\|_{R^n}=o(1)$, $\|\hat{u}_{m_k}(t)-\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{L_2^r}=o(1)$.

另外,由引理 6 和引理 4 可得

$$\begin{aligned}|J_{m_k}(U^*)-J(\bar{\boldsymbol{u}}(t))|&\leqslant|J_{m_k}(U^*)-J(U^*\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t))|+|J(U^*\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t))-J(\bar{\boldsymbol{u}}(t))|\\&\leqslant o(1)+D_1\|\hat{\boldsymbol{u}}_{m_k}(t)-\bar{\boldsymbol{u}}(t)\|_{L_2^r}.\end{aligned}\tag{25}$$

所以, 由 $\bar{\sigma}_2=o(1)$ 可知, $J_{m_k}(U^*)\to J(\bar{\boldsymbol{u}}(t))$, $(m_k\to\infty)$. 由结论(a)和极限的唯一性以及问题$\mathscr{P}$解的唯一性可知, $\bar{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{u}^*(t)$, $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{x}^*(t)$, 从而结论成立.

定理 3. 在定理 2 的假设下,若设 $\boldsymbol{u}^*(t)$ 有有界导数, $\boldsymbol{f}$ 和 L 均不显含 t 或 $\left|\dfrac{dL}{dt}\right|$, $\left\|\dfrac{d\boldsymbol{f}}{dt}\right\|$ 均有界,则

(a) $|J_m(U^*)-J(\boldsymbol{u}^*(t))|=O\left(\dfrac{1}{m}\right)$, (b) $l_1=O\left(\dfrac{1}{m}\right)$; $l_2=O\left(\dfrac{1}{m}\right)$.

证明. 仿定理 2 的证法,由引理 6 和引理 1 可证得

$$|a_m|=O\left(\frac{1}{m}\right),\quad|b_m|=O\left(\frac{1}{m}\right),$$

从而知结论(a)成立．又由引理 1 可知

$$\|(\bar{\mathscr{B}}\boldsymbol{u}^*(t))\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)-\boldsymbol{u}^*(t)\|_{L_2^r}=O\left(\frac{1}{m}\right),$$

所以 $l_1=O\left(\frac{1}{m}\right)$. 因为 $\omega_u=O\left(\frac{1}{m}\right)$, 且 $\omega_f=O\left(\frac{1}{m}\right)$,由定理 1 可得 $l_2=O\left(\frac{1}{m}\right)$.

$\hat{\boldsymbol{u}}_{m_k}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}_{m_k}(t)$ 被称为问题$\mathscr{P}$的 BPO 解，它以块脉冲函数级数的形式表示.

参　考　文　献

[1] Hwang, C. and Shih. Y. P., Optimal Control of Delay System via Block Pulse Functions, *J. Optimization Theory and Applications*, **45** (1985), 101—112.

[2] Wu J. M. and Wang S. Y., Optimal Control for Nonlinear Time Delay Systems via Block Pulse Operator, Proceedings of International AMSE Conference "Modelling and Simulation", Nov. 7—9, SHENZHEN, 1988.

[3] 王行愚，块脉冲算子及其在控制理论中的应用(I)，华东化工学院学报，**9**(1983)，1—16.

[4] Wang S. Y. and Jiang W. S., The Application of Block Pulse Operator in Identification of Ditributed Parameter Systems, Proceedings of the 9th. world Congress of IFAC, 2, 655—660, 1984.

[5] Wang S. Y., The Convergence of Block Pulse Series Approximation Solution for Nonlinear System, Proceedings of Intem. AMSE Conference "Singnals & Systems", 2, 83—94, 1989.

[6] Curtain, R. F. and Pritchard. A. J., Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press (1977), p20, p124.

[7] 那汤松，实变函数论，人民教育出版社(1963)，p199, p33.

THE CONVERGENCE OF BLOCK PULSE OPERATOR SOLUTION TO TIME LAG SYSTEM CONTROL PROBLEM

Wang Shienyu

(*East China University of Chemical Technology*)

Abstract

In this paper, a discrete approximation scheme based on block pulse operator is given. Using the approximation scheme, we can obtain a block pulse series solution (BPSS) of nonlinear optimal control problem with time-lag. The convergence of the BPSS to the exact solution of the problem is proved and first order convergence rate is established.

Key words: Time lag system; optimal control; convergence; block pulse operator.