

# 设计鲁棒控制器的主导特征向量 配正方法

张 霖 吴 麒

(清华大学自动化系)

## 摘 要

本文对设计多变量控制系统的反标架正规化方法<sup>[1]</sup>进行了分析,并针对其缺点,提出了对主导特征函数进行特征向量局部配正的设计方法。它保留了反标架正规化方法在鲁棒性方面的优点,而使控制器矩阵为有理函数矩阵。

**关键词:** 多变量反馈系统,鲁棒控制,鲁棒性指标,特征向量配正。

## 一、引 言

自七十年代 Rosenbrock 等人提出多变量控制系统的一系列频率域设计方法以来,在一些实际控制系统设计中收到很好的效果,使传统的频率域方法得到新的发展,并越来越多地受到人们的重视。近年来,我国控制界也开始注意多变量频率域理论的研究,并取得了一些可喜的成就。例如,中国科技大学白方周等为再沸油加热炉设计的控制器,清华大学高黛陵等为汽轮发电机组设计的控制器<sup>1)</sup>等。

八十年代初 Doyle 和 Stein 提出关于逆 Nyquist 阵列法及特征轨迹法的鲁棒性问题<sup>[2]</sup>后,越来越多的人开始从事频率域设计方法的鲁棒性问题的研究,并得到了很多有益的结果。但目前对多变量频率域设计方法,特别是对鲁棒性问题的研究还是不充分的。

反标架正规化 (Reversed-frame Normalization) 设计方法<sup>[3]</sup>是 Hong 和 MacFarlane 于 1982 年提出的一种保证鲁棒性的多变量控制系统设计方法。在现有的设计方法中,它是较好的一种。它以奇异值分解为基础,能够同时保证系统的稳定性、动态性能和鲁棒性。但反标架正规化控制器通常不能准确地实现,因为一般情况下传递函数矩阵的奇异值分解给出的是  $s$  的无理函数矩阵的乘积。此外,这种方法具有保守性。

本文提出的方法能克服反标架正规化方法的上述缺点。

## 二、反标架正规化方法

考虑图 1 所示系统。作受控对象传递函数矩阵  $G(s)$  的奇异值分解

本文于 1989 年 3 月 27 日收到。

1) 高黛陵、吴麒、蔺林,台州电厂汽轮发电机组控制器的多变量频域方法设计研究报告,清华大学自动化系,1987。

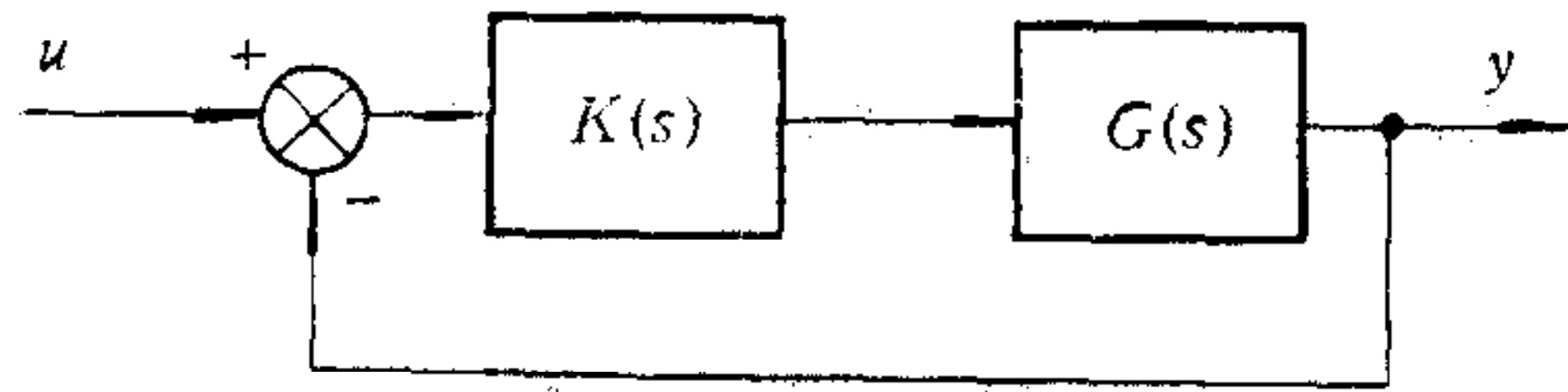


图 1

$$G(s) = Y(s)\text{diag}(g_1(s), g_2(s), \dots, g_n(s))U^*(s). \quad (1)$$

其中  $G(s)$  为  $n \times n$  可逆有理函数矩阵;  $Y(s), U(s)$  为酉矩阵;  $g_1(s), g_2(s), \dots, g_n(s)$  为  $G(s)$  的奇异值函数; 记号 \* 表示矩阵的共轭转置. 设计控制器

$$K(s) = U(s)\text{diag}(k_1(s), k_2(s), \dots, k_n(s))Y^*(s), \quad (2)$$

则系统的开环传递函数矩阵为

$$Q(s) = G(s)K(s) = Y(s)\text{diag}(\lambda_1(s), \lambda_2(s), \dots, \lambda_n(s))Y^*(s), \quad (3)$$

其中  $\lambda_i(s) = g_i(s)k_i(s), i = 1, 2, \dots, n$ .

由于  $Y(s)$  为酉矩阵, 所以  $Q(s)$  为正规矩阵. 可以证明, 正规矩阵的特征值对摄动最不敏感<sup>[3]</sup>. 所以得到的系统鲁棒性最好. 以上设计方法称为反标架正规化方法.

反标架正规化方法有以下缺点:

首先, 由于  $G(s)$  的奇异值分解式 (1) 中的各矩阵一般为  $s$  的无理函数矩阵, 因而  $K(s)$  只能近似实现. Hong 和 MacFarlane 给出了两种用有理函数矩阵拟合  $K(s)$  的算法, 但是计算量较大, 得到的  $K(s)$  往往也很复杂; 而且有些情况下拟合误差可能相当大, 使  $Q(s)$  的正规性难以保证. 因此系统的鲁棒性未必能象希望的那么好.

其次, 反标架正规化方法有一定保守性. 若  $Q(s)$  的特征值互不相同, 则有

$$Q(s) \text{ 正规} \iff Q(s) \text{ 配正}, \forall s \in D \text{ 形围线}^{[4]}.$$

这里,  $Q(s)$  配正是指:  $Q(s)$  的任一奇异值分解  $Q(s) = Y(s)\Sigma_Q(s)U^*(s)$  中, 标架矩阵  $Y(s)$  和  $U(s)$  满足

$$Y(s) = U(s)\Theta(s), \forall s \in D \text{ 形围线}. \quad (4)$$

式中  $\Theta(s) = \text{diag}(e^{j\theta_1(s)}, e^{j\theta_2(s)}, \dots, e^{j\theta_n(s)})$ , 而诸  $\theta_i(s)$  为  $s$  的实函数,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 换言之, 有

$$\mathbf{y}_i(s) = \mathbf{u}_i(s)e^{j\theta_i(s)}, i = 1, 2, \dots, n, \forall s \in D \text{ 形围线}.$$

其中  $\mathbf{y}_i(s), \mathbf{u}_i(s)$  分别为  $Y(s), U(s)$  的第  $i$  列. 这种情况下称向量  $\mathbf{y}_i(s)$  和  $\mathbf{u}_i(s)$  是配正的. 因此, 将  $G(s)$  正规化, 相当于将其奇异值分解的标架矩阵的所有列向量都配正. 由下面的定理可知, 这将使  $Q(s)$  的所有特征函数对摄动都不敏感. 然而这是不必要的. 原因如下:

在设计控制器时, 首先根据稳定性和动态性能的要求规定一组预期特征函数  $\lambda_1(s), \lambda_2(s), \dots, \lambda_n(s)$ . 这些特征函数的轨迹与  $(-1, j0)$  点之间的距离一般是不同的. 若某一个特征函数的轨迹距  $(-1, j0)$  点最近, 而其它特征函数的轨迹距之较远, 则称这个特征函数为主导特征函数. 关于主导特征函数的特征向量称为主导特征向量.

不妨设  $\lambda_1(s)$  为主导特征函数. 在一般情况下, 只要设计控制器使  $\lambda_1(s)$  对摄动最不敏感就够了. 其它特征函数即便有较大的摄动, 也不至于影响系统的稳定性.

基于这种考虑, 笔者提出下述主导特征向量配正设计方法.

### 三、主导特征向量配正设计方法

**定义 1.** 设  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  有互不相等的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,  $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $\|B\|_2 = 1$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ,  $A + \varepsilon B$  有互不相等的特征值  $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ . 定义  $A$  的特征值  $\lambda_i$  的敏感性指标为

$$p_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_B \min_j \frac{|\lambda_i - \lambda'_j|}{\varepsilon}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

容易理解,  $p_i$  愈小, 则特征值  $\lambda_i$  的鲁棒性愈佳.

**引理 1.** 设  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为其特征值, 设  $\lambda_i$  为单特征值,  $\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i \in \mathbf{C}^n$  分别为  $\lambda_i$  的正规化的左、右特征向量 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). 则  $\lambda_i$  的敏感性指标为

$$p_i = \frac{1}{|\mathbf{y}_i^* \mathbf{x}_i|} \geq 1.$$

证明见附录 A.

**定义 2.** 若矩阵  $T = (f_1, \dots, f_n)$  可逆, 且有  $i$  使  $\|f_i\|_2 = 1$ ,  $f_i \perp f_j \quad \forall j \neq i$ , 则矩阵  $T$  称为第  $i$  列正交矩阵.

**定理 1.** 设矩阵  $T = (f_1, \dots, f_n)$  为第  $i$  列正交矩阵,  $T^{-1} = (g_1, \dots, g_n)^*$ , 则  $(T^{-1})^*$  亦为第  $i$  列正交矩阵, 且  $g_i = f_i$ .

证明见附录 B.

**定理 2.** 设矩阵  $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$  可分解为  $A = Y \Sigma U^{-1}$ ,

其中  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  为酉矩阵,  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  为第  $i$  列正交矩阵,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ , 诸  $\sigma_i$  为复数. 若对某个  $i$  有  $\mathbf{y}_i = e^{i\theta_i} \mathbf{u}_i$ , 则有

- 1)  $e^{i\theta_i} \sigma_i$  为  $A$  的一个特征值;
- 2) 此特征值的敏感性指标最小;
- 3)  $\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i$  分别为此特征值的左、右特征向量.

证明见附录 C.

利用上述定理可得设计方法如下(为简单起见, 以下省略自变量  $s$ ):

设定一组希望的有理特征函数  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . 不妨设  $\lambda_1$  为主导特征函数. 将对象的传递函数矩阵  $G$  分解为

$$G = Y_G U_G^{-1}, \quad (6)$$

其中  $Y_G = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  为酉有理函数矩阵,  $U_G$  为可逆的有理函数矩阵. 令控制器的传递函数矩阵为

$$K = U_K \Sigma_K U_K^{-1},$$

其中  $U_K = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . 令  $u_1 = e^{-i\theta_1} y_1$ , 且  $u_1 \perp u_j \quad \forall j \neq 1$ , 则  $U_K$  为第 1 列正交矩阵. 又

$$\Sigma_K = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n),$$

其中  $\sigma_1 = e^{-i\theta_1} \lambda_1$ , 则系统的前向传递函数矩阵  $Q$  为  $Q = GK = Y_G \Sigma_K U_K^{-1}$ , 即  $Q$  满足定理 2 要求的性质. 由定理 2 可知,  $\lambda_1$  为  $Q$  的一个特征值, 而且它的敏感性指标最小.

下面还要确定  $\sigma_2, \dots, \sigma_n$  及  $U_K^{-1}$  的其它各行, 以使  $Q$  的其它特征值为  $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

设  $Q$  的特征值分解式为  $Q = T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) T^{-1}$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  为希望的特征函数;  $T = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ,  $T^{-1} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^*$  均为第 1 列正交矩阵. 由定理 2 的 3) 知可取  $f_1 = y_1$ . 又由定理 1 知有  $g_1 = f_1 = y_1$ .

由矩阵的谱展开定理得  $Q = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n$ , 其中  $E_i = f_i g_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

另一方面, 由定理 1 知  $U_K^{-1}$  可写为  $U_K^{-1} = (u_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n)^*$ , 所以有

$$\begin{aligned} Q &= Y_G \Sigma_K U_K^{-1} = (y_1; Y_{n-1}) \begin{pmatrix} \sigma_1 & \\ & \Sigma_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ U_{n-1}^* \end{pmatrix} \\ &= y_1 \sigma_1 u_1^* + Y_{n-1} \Sigma_{n-1} U_{n-1}^* = y_1 \sigma_1 e^{i\theta_1} y_1^* + Y_{n-1} \Sigma_{n-1} U_{n-1}^* \\ &= \lambda_1 f_1 g_1^* + Y_{n-1} \Sigma_{n-1} U_{n-1}^*, \end{aligned}$$

其中  $Y_{n-1} = (y_2, \dots, y_n)$ ,  $\Sigma_{n-1} = \text{diag}(\sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ,  $U_{n-1}^* = (\tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n)^*$ . 从而有  $Y_{n-1} \Sigma_{n-1} U_{n-1}^* = \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n$ .

记  $E = \Sigma_{n-1} U_{n-1}^*$ , 则有

$$E = Y_{n-1}^* (\lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n). \quad (7)$$

控制器矩阵  $K$  可表示为

$$\begin{aligned} K &= U_G \Sigma_K U_K^{-1} = U_G \begin{pmatrix} \sigma_1 & \\ & \Sigma_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^* \\ U_{n-1}^* \end{pmatrix} \\ &= U_G \begin{pmatrix} \sigma_1 u_1^* \\ \Sigma_{n-1} U_{n-1}^* \end{pmatrix} = U_G \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^* \\ E \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

所以, 只要找一组有理函数向量  $f_i, i = 2, \dots, n$  (从而可求出诸  $g_i, i = 2, \dots, n$ ), 便可算出诸  $E_i (i = 2, \dots, n)$ , 从而由式(7)算出  $E$ , 再由式(8)得到一个有理的控制器  $K$ .

#### 四、控制器的设计步骤

第 1 步. 对  $G$  做分解  $G = Y_G U_G^{-1}$ , 其中  $Y_G$  为酉有理函数矩阵,  $U_G$  为可逆有理函数矩阵;

第 2 步. 规定一组希望的有理特征函数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 并确定其轨迹最接近  $(-1, j0)$  点的一个(或几个), 这里不妨设为  $\lambda_1$ ;

第 3 步. 选择有理函数向量  $f_2, \dots, f_n$ , 使  $y_1 \perp f_j, j = 2, \dots, n$ . 构造  $T = (y_1, f_2, \dots, f_n)$ , 从而求出  $T^{-1} = (y_1, g_2, \dots, g_n)^*$ , 由此确定  $g_2, \dots, g_n$ , 使  $E = Y_{n-1}^* (\lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n)$  为尽量简单的有理函数矩阵;

第 4 步. 令控制器传递函数矩阵为

$$K = U_G \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1^* \\ E \end{pmatrix}.$$

## 五、仿 真

作者对以上设计方法进行了计算机仿真实验。该实验在清华大学计算中心的 DPS8 计算机上和清华大学自动化系控制理论教研组的 PDP11/23 计算机上进行,使用《电力系统暂态稳定性仿真程序》(高黛陵、王幼毅、陈霖等研制)完成。

控制器的设计是依据简化的线性模型,在清华大学计算中心的 ELXI 机上完成的。所得控制器为

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.44(0.44s + 1)(0.27s + 1)}{s(0.013s + 1)} & 0 \\ \frac{9.5(0.93s + 1)(-0.023s + 1)}{s(4.6s + 1)} & 41 \end{bmatrix}.$$

仿真所用的数据是浙江省电力试验研究所提供的 125 兆瓦汽轮发电机组实际参数和浙江省电网的动态等值模型。实验结果表明,该设计是成功的,其控制器比常规控制方式提高汽轮发电机组及输电系统的暂态稳定极限功率达 29%。

## 六、结 论

本文提出的利用主导特征向量配正的方法,增加了控制器设计的自由度,从而可使控制器为有理函数矩阵,同时也保证了系统的鲁棒性。仿真实验证实了这一点。

关于如何求得最佳的分解式(6),如何选取最佳的诸  $f_i, g_i$  以使控制器尽可能简单,以及在  $U_G(s)$  有右半面极点的情况下,如何设计稳定的控制器等问题,尚待进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] 洪仰三,麦克法兰, A. G. J. 著,吴麒译,多变量反馈的准传统方法,科学出版社,1987.
- [2] Doyle, J. C. and Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis, *IEEE Trans.* **AC-26**(1981), 4—16.
- [3] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Clarendon Press, Oxford, 1965.

## 附 录

### A. 引理 1 的证明

考虑矩阵  $A + \varepsilon B$ ,  $B \in \mathbf{C}^{n \times n}$ ,  $\|B\|_2 = 1$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . 不失一般性,考虑  $\lambda_1$ . 由于  $\lambda_1$  为单特征值,则必存在  $A + \varepsilon B$  的相应的特征值  $\lambda'_1(\varepsilon)$  满足下式<sup>[3]</sup>:

$$\lambda'_1(\varepsilon) = \lambda_1 + l_1\varepsilon + l_2\varepsilon^2 + \dots \quad (9)$$

与  $\lambda'_1(\varepsilon)$  相应的特征向量  $x'_1(\varepsilon)$  则满足下式:

$$x'_1(\varepsilon) = x_1 + (\varepsilon t_{21} + \varepsilon^2 t_{22} + \dots)x_2 + \dots + (\varepsilon t_{n1} + \varepsilon^2 t_{n2} + \dots)x_n, \quad (10)$$

由  $x'_1(\varepsilon)$  和  $\lambda'_1(\varepsilon)$  的定义知  $(A + \varepsilon B)x'_1(\varepsilon) = \lambda'_1(\varepsilon)x'_1(\varepsilon)$ .

将式(9),式(10)代入上式,比较  $\varepsilon$  的系数得

$$A \left( \sum_{i=2}^n t_{i1} x_i \right) + Bx_1 = \lambda_1 \left( \sum_{i=2}^n t_{i1} x_i \right) + l_1 x_1.$$

由于  $Ax_i = \lambda_i x_i$ , 上式可化为

$$\sum_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1) t_{i1} x_i + Bx_1 = l_1 x_1.$$

两端同用  $y_1^*$  左乘, 再考虑到  $y_1^* x_i = 0, \forall i \geq 2$ , 即有

$$l_1 = y_1^* Bx_1 / y_1^* x_1.$$

由于  $|y_1^* Bx_1| \leq \|y_1^*\|_2 \|B\|_2 \|x_1\|_2 = 1$ , 故  $|l_1| \leq 1/|y_1^* x_1|$ .

而当  $B = I$  且  $|y_1^* x_1| = 1$  时, 有  $|l_1| = 1/|y_1^* x_1|$ , 故有

$$\sup_B |l_1| = 1/|y_1^* x_1|. \quad (11)$$

由式(9), 对于充分小的  $\varepsilon$ , 有  $\lambda'_i(\varepsilon) \rightarrow \lambda_i + l_i \varepsilon$ , 即

$$\min_j |\lambda_i - \lambda'_j| = |l_i| \varepsilon. \quad (12)$$

将式(11), 式(12)代入敏感性指标的定义公式(5), 即得

$$p_i = 1/|y_1^* x_1|.$$

又  $|y_1^* x_1| \leq \|y_1^*\|_2 \|x_1\|_2 = 1$ , 故知  $p_i \geq 1$ .

证毕.

### B. 定理 1 的证明

由

$$T^{-1}T = \begin{pmatrix} g_1^* \\ g_2^* \\ \vdots \\ g_n^* \end{pmatrix} (f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{pmatrix} g_1^* f_1 & g_1^* f_2 & \dots & g_1^* f_n \\ g_2^* f_1 & g_2^* f_2 & \dots & g_2^* f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n^* f_1 & g_n^* f_2 & \dots & g_n^* f_n \end{pmatrix} = I, \quad (13)$$

比较两端第  $i$  行, 得  $g_i^* T = e_i^T$ ,  $e_i$  为单位矩阵  $I_n$  的第  $i$  列. 但  $f_i^* T = f_i^* (f_1, \dots, f_n) = e_i^T$ . 由于  $T$  可逆, 从前两式知  $g_i = f_i$ , 故  $\|g_i\|_2 = 1$ . 又比较式(13)两端第  $i$  列得

$$g_i^* f_i = \dots = g_{i-1}^* f_i = g_{i+1}^* f_i = \dots = g_n^* f_i = 0, \text{ 即 } f_i \perp g_j, \forall j \neq i.$$

但  $f_i = g_i$ , 故有  $g_i \perp g_j, \forall j \neq i$ . 即  $(T^{-1})^* = (g_1, \dots, g_n)$  为第  $i$  列正交矩阵.

证毕.

### C. 定理 2 的证明

由  $y_i = e^{j\theta_i} u_i$  可得  $Ay_i = e^{j\theta_i} Au_i$ . 又由  $A = Y\Sigma U^{-1}$  即  $AU = Y\Sigma$  得

$$Au_i = \sigma_i y_i.$$

代入上式得

$$Ay_i = e^{j\theta_i} \sigma_i y_i. \quad (14)$$

所以  $e^{j\theta_i} \sigma_i$  为  $A$  的特征值, 记为  $\lambda_i$ , 且  $y_i$  为其右特征向量.

下面证明  $u_i$  为  $\lambda_i$  的左特征向量.

由  $y_i = e^{j\theta_i} u_i$  可得

$$y_i^* A = e^{-j\theta_i} u_i^* A. \quad (15)$$

命  $U^{-1}$  的各行为  $\tilde{u}_1^*, \tilde{u}_2^*, \dots, \tilde{u}_n^*$ , 即

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^* \\ \tilde{u}_2^* \\ \vdots \\ \tilde{u}_n^* \end{pmatrix}.$$

由  $A = Y\Sigma U^{-1}$  得  $Y^* A = \Sigma U^{-1}$ . 比较两端的第  $i$  行得  $y_i^* A = \sigma_i \tilde{u}_i^*$ . 但  $U$  为第  $i$  列正交矩阵, 故由定

理 1 知有  $\bar{u}_i = u_i$ . 所以有  $y_i^* A = \sigma_i u_i^*$ . 与式(15)比较得  $u_i^* A = e^{j\theta_i} \sigma_i u_i^*$ . 所以  $u_i$  为  $\lambda_i$  的左特征向量.

矩阵  $A$  的特征值  $\lambda_i = e^{j\theta_i} \sigma_i$  的敏感性指标为

$$p_i = \frac{1}{|y_i^* u_i|} = \frac{1}{|y_i^* y_i e^{-j\theta_i}|} = \frac{1}{|y_i^* y_i|} = 1.$$

又由引理 1 知  $p_i \geq 1$ . 故当满足  $y_i = e^{j\theta_i} u_i$  时敏感性指标  $p_i$  为最小.

证毕.

## DOMINANT EIGENVECTOR ALIGNMENT APPROACH TO ROBUST CONTROLLER DESIGN

ZHANG LIN    WU QI

(Department of automation, Tsinghua University)

### ABSTRACT

In this paper, the authors analysed the reversed-frame normalization (RFN) method for the design of robust controllers of multivariable systems. A new design method based on the alignment of dominant eigenvectors is developed. This method maintains the advantages of the RFN method in robustness, while the controller matrix obtained is guaranteed to be rational. The design is less conservative compared to the existing RFN method and has been successfully applied to the design of turbo-generator controller.

**Key words:** Multivariable feedback systems; robust control; measure of robustness; eigenvector alignment.