

# 一种基于 Lyapunov 的机器人直角 坐标系轨线控制<sup>1)</sup>

李耀通 韩珂

(中国科学院自动化研究所)

## 摘 要

本文提出一种可以使机器人直接跟踪直角坐标轨线而无须进行坐标变换的控制方法。文中将讨论这种方法的物理意义,证明 Lyapunov 全局稳定性,并给出在 PUMA 560 模型上进行模拟实验的结果。

**关键词:** 机器人,任务空间,轨线控制, Lyapunov 稳定性。

## 一、引 言

现在的工业机器人的控制系统将机器人的关节位置(角度或长度)看作是相互独立的控制对象,并对每个关节施行传统的 PD (位置和速度) 伺服控制,如图 1 所示。图中的  $K_p + sK_v$  环节代表 PD 控制器,  $K_p$  和  $K_v$  分别代表位置和速度增益。如果想让机器人的末端沿着一条定义在直角坐标系上的轨线运动(在绝大多数情况下,机器人的任务是以直角坐标定义的),这种控制方法必须首先将它变换成相应的关节坐标轨线,即求解机器人运动学的逆。数学上,我们用  $f^{-1}(\cdot)$  表示这一过程并将其示于图 1。

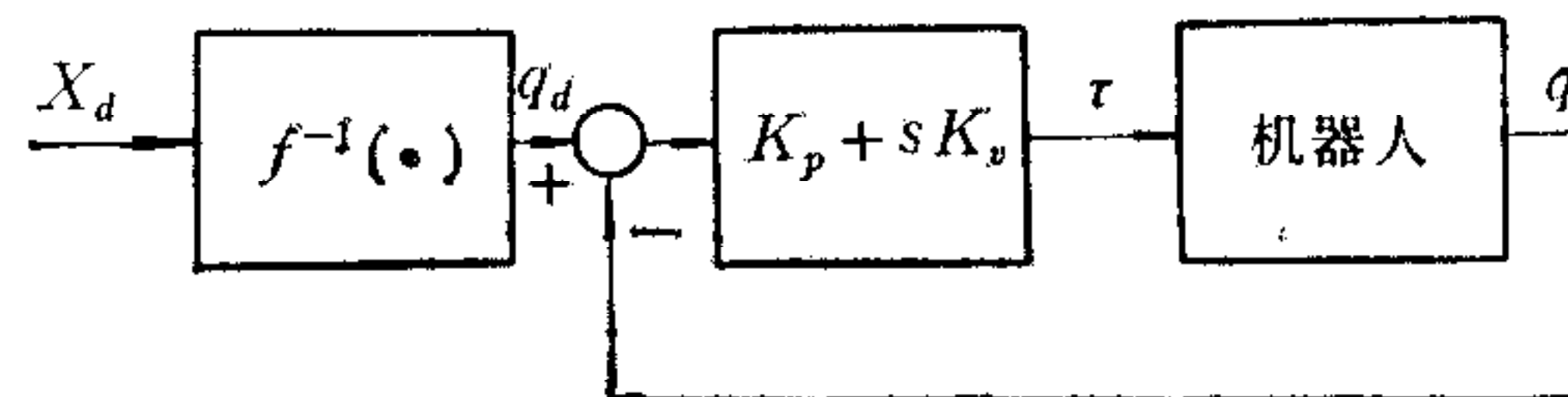


图 1 典型机器人控制框图

$$f^{-1}(\cdot): X^d \subset R^n \rightarrow q^d \subset R^m. \quad (1)$$

式中  $X^d$ ,  $q^d$  分别代表直角坐标和关节坐标系任务轨线。一般,  $n = m = 6$ 。

求解  $f^{-1}(\cdot)$  是比较困难的,已经提出的解法有反变换法<sup>[1]</sup>、螺旋代数法<sup>[2]</sup>、双矩阵法<sup>[3]</sup>、双四元法 (Dual Quaternion)<sup>[4]</sup>、迭代法<sup>[5]</sup>、几何法<sup>[6]</sup>等等,但都有一定的局限性。例如,Paul 等 1981 年提出的反变换法依次使用  $4 \times 4$  齐次变换矩阵的逆,只适合于有三

本文于 1989 年 9 月 23 日收到。

1) 国家自然科学基金资助课题。

个关节轴线相交于一点的机器人,而且不能告知如何从几个可能的解当中选取一个特解(因此有赖于使用者的直观或经验)。Uicker, Milenkovic, Huang 等人提出的迭代法使用范围较广,但耗费的机时十分可观,而且不能保证它一定收敛。应该指出,多解和计算机的时间消耗是求解反向运动学时两个带普遍性的问题。求解  $f^{-1}(\cdot)$  的另一个问题是奇点。当任务轨线经过奇点或者它的邻域时,变换处于病态,  $f^{-1}(\cdot)$  可能有无穷多组解,数值计算方法在这些地方也不收敛。

用自动控制系统的观点看图 1 所示的控制方法,系统对  $X^d$  实际上是开环的( $f^{-1}(\cdot)$  被排斥在闭合回路之外)。如果把控制机器人沿预定直角坐标轨线运动看作是轨线跟踪问题,那么这种方法并不能使机器人“感觉到”自己追随的对象。坐标变换中的误差影响了机器人的精度,甚至在出错的情况,伺服系统仍然照常执行,这对机器人在高度结构化的工业环境中运行是很危险的。

试图直接在直角坐标系控制机器人的工作可以追溯到 1983 年。Khatib 在用直角坐标变量描述机器人动力学的基础上提出了一种直角坐标下的动力学控制方法<sup>[7]</sup>。这种方法利用一个简单的力变换取代了复杂的坐标变换,从而减少了计算时间并且避免了奇异点问题,在斯坦福 AI 实验室一台 PUMA 600 作的实验表明它可以作到动力学的实时控制。本文所描述的控制方法,可以实现机器人对直角坐标轨线的直接跟踪,不需要传统的由直角坐标空间到关节坐标空间的变换,也不用计算 Jacobian 的逆(Whitney 提出的 Resolved Motion Rate Control<sup>[8]</sup> 实现了直角坐标跟踪,但需要实时地计算 Jacobian 的逆。Jacobian 求逆同样存在计算时间和奇异点问题)。其特点是直角坐标变量被纳入到闭合控制回路,驱动力矩的产生依赖于坐标变换的灵敏度而不是传统的关节位置误差。让我们首先讨论这种方法的物理背景。

## 二、物 理 背 景

这一节将以一个简单的机器人为例,说明本文提出的直角坐标跟踪控制的某些基本思想。

考虑一个平面二自由度机器人,其动力学方程为

$$M(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} = \tau. \quad (2)$$

式中  $M(q)$  是惯性矩阵,是对称和正定的;  $C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q}$  是向心和 Coriolis 项;  $\tau$  是第一、二关节的转矩。我们的问题是,假设  $q$  和实际的机器人的末端位置  $X$  已知( $q$  是可以直接测量的,  $X$  至少可以通过直接计算,  $X = f(q)$  得到,计算正向运动学  $f(\cdot)$  是非常简单的),设计一个反馈控制律使  $X$  跟踪预定的  $X^d$  并将  $\Delta X = X - X^d$  纳入反馈回路内。为了解决这个问题,让我们首先考虑位置控制,即  $X^d$  是一个固定的矢量,  $X$  的起始位置在  $X^d$  的某邻域内,反馈控制律必须保证  $X$  收敛到  $X^d$ 。

方程(2)是系统动力学的牛顿形式(即  $F = m \cdot a$  牛顿第二定律形式),为了进一步讨论这种非线性动力学的物理内涵,我们把它改写成哈密顿形式。考虑系统的能量转换关系,有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{q}^T \cdot M \cdot \dot{q}) = \dot{q}^T \cdot \tau. \quad (3)$$

该式描写系统的动能的增加率等于关节驱动器的输出功率。牛顿形式中的向心和 Coriolis 不再为显函数, 而是隐含在该方程的微分项里面。为了直接采用  $\Delta X$  而不是  $\Delta q$  作控制器的输入, 考虑如下的控制律:

$$\tau = -\beta \cdot J^T \cdot \Delta X - K_d \cdot \dot{q}. \quad (4)$$

式中  $\beta$  可为任意大于零的实数;  $J^T$  是 Jacobian 的转置, 是系统状态  $q$  的函数;  $\Delta X = X - X^d$  如上所述;  $K_d$  可为任意正定矩阵, 其元素可以是常数也可以是系统状态  $q$  和  $\dot{q}$  的函数。物理上, 方程(4)相当于在机器人的各关节上装一个扭簧和一个阻尼。  $\beta \cdot J^T$  相当于扭簧的弹性模量,  $K_d$  相当于阻尼系数。

基于这样的理解, 我们取系统偏离  $X^d$  后的总能量作候选的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \left[ \dot{q}^T \cdot M \cdot \dot{q} + \int_{q^d}^q \langle \beta \cdot J^T \cdot \Delta X, dq \rangle \right]. \quad (5)$$

积分中的  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  代表矢量的内积。该积分项由于被积函数是有界的, 所以在有限区间的积分也是有界的。式中的第一项一定大于或等于零, 因为  $M$  是正定的; 第二项也一定大于或等于零。因为

$$J^T \cdot \Delta X = J^T \cdot (J \cdot \Delta q) = (J^T \cdot J) \cdot \Delta q, \quad (6)$$

显然,  $J^T \cdot J$  是正定的。

现在考虑  $V$  的时间导数。对方程(5)求导并代入(3)和(4)式, 得到

$$\dot{V} = \dot{q}^T \cdot (\tau + \beta \cdot J^T \cdot \Delta X) = -\dot{q}^T \cdot K_d \cdot \dot{q} \leq 0. \quad (7)$$

上式只有在  $\dot{q} = 0$  时才有  $\dot{V} = 0$ 。容易证明当  $\dot{q} = 0$  时  $\Delta X$  必须为零, 即机器人不可能停滞在一个误差不为零的位置。这说明系统起码是渐近稳定的。

现在我们讨论控制力矩方程(4)中与直角坐标误差直接发生关系的第一项的物理意义。对于平面二自由度模型,

$$J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

式中  $x_1, x_2$  代表直角坐标位置, 而  $q_1, q_2$  代表关节角度。我们注意到直角坐标误差可以分解成各直角坐标方向上的误差之和, 即

$$\Delta X = [\Delta x_1, \Delta x_2]^T = [\Delta x_1, 0]^T + [0, \Delta x_2]^T. \quad (9)$$

对于每一个方向上的误差, 例如  $[\Delta x_1, 0]^T$  而言

$$\begin{cases} \tau_1 \propto \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \Delta x_1, \\ \tau_2 \propto \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \Delta x_1. \end{cases} \quad (10)$$

方程(10)表明: 为了消除  $\Delta x_1$ , 各关节所施力矩与该关节对调整  $x_1$  的“灵敏度”  $\partial x_1 / \partial q_i$  成正比。换句话说, 哪个关节在此时此刻对调整  $x_1$  更有效, 哪个关节的力矩就大。至于方程(4)中的第二项, 由于它在控制回路的内部, 所以可以方便地采取容易测量(或计算)



的关节速度作输入变量。

### 三、直角坐标轨线跟踪控制

机器人的动力学方程可以写成如下的一般形式:

$$M(q) \cdot \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + F(q, \dot{q}) + G(q) = \tau. \tag{11}$$

式中  $F(q, \dot{q})$  代表摩擦力矩, 可能是粘滞性的或干摩擦。  $G(q)$  是重力矩。 当系统平衡时, 外力矩与干摩擦之差用以抵消重力矩, 即  $\tau - F(q, 0) = G(q)$ 。  $M(q)$  和  $C(q, \dot{q})$  的物理意义与方程(2)中的相同。 相应(11)式的哈密顿方程应该是

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \tau \cdot M \cdot \dot{q} \right) = \dot{q}^T \cdot (\tau - G - F). \tag{12}$$

对上式的两边求导并将(11)式代入(12)式, 有

$$\dot{q}^T \cdot (\dot{M} - 2C) \cdot \dot{q} = 0. \tag{13}$$

可以证明  $(\dot{M} - 2C)$  矩阵是反号对称的 (Skew-Symmetric:  $A = -A^T$ )<sup>[9]</sup>。

考虑如下的控制力矩和 Lyapunov 候选函数

$$\tau = -\beta \cdot J^T \cdot \Delta X - K_d \cdot \dot{q} + G, \tag{14}$$

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T \cdot M \cdot \dot{q} + \int_{q^d}^q \langle \beta \cdot J^T \cdot \Delta X, dq \rangle. \tag{15}$$

式中各项的物理意义与方程(4),(5)中的相同。 假定  $q^d$  及其相应的  $X^d$  代表任意一个平衡位置,  $q_0$  及其相应的  $X_0$  代表任何一个初始位置。 出于与讨论方程(5),(6)时同样的理由, 我们有  $V \geq 0$ , 利用方程(12)和(14), 还可以导出

$$\dot{V} = -\dot{q}^T \cdot (K_d \cdot \dot{q} + F). \tag{16}$$

由于  $K_d$  是正定的,  $\dot{q}^T \cdot F$  根据方程(11)也一定有  $\dot{q}^T \cdot V \geq 0$ , 所以  $\dot{V} \leq 0$ 。 证明中我们不需要  $X_0$  或  $q_0$  必须在  $X^d$  或  $q^d$  的某邻域内, 所以系统是全局渐近稳定的。

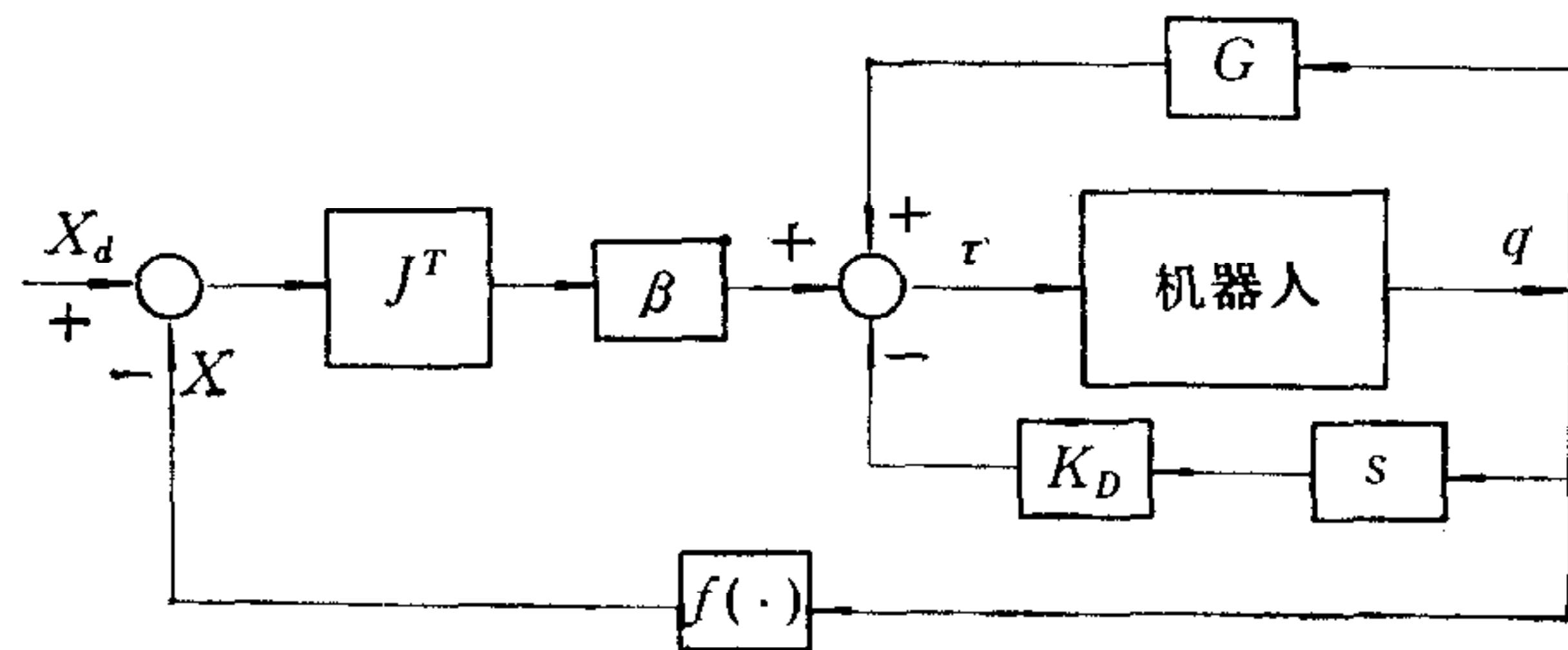


图2 机器人直角坐标位置跟踪控制系统

我们将以上的设计思想示于图2。可以看出该系统的最大特点是它直接接受预期的直角坐标轨线并利用直角坐标误差对预期轨线进行跟踪, 从而不仅消除了传统的运动学求逆途径碰到的各种问题, 而且其精度和可靠性都会因此得到相应的提高。还可以看出该系统所需的控制算法非常简洁和直接了当, 从而为实时跟踪提供了可能性。以上两点对改进现在的机器人的性能是意义重大的。

虽然以上的讨论表明我们有可能设计和实现一种与传统方法不同的机器人直角坐标跟踪控制,但我们的理论工作还远远没有完成. Lyapunov 理论能够回答的只限于系统在各个层次上(稳定、渐近稳定、全局性渐近稳定)的稳定问题,它还是一种“静”的概念. 所谓“静”指的是如果“ $X^d$  保持不变”或者说“ $X^d$  被冻结”的话,那么“偏开  $X^d$  的系统状态最终( $t \rightarrow \infty$ ) 回到  $X^d$  上来”,正象我们在证明中所假设的那样. 但是它没有回答“如果在  $X$  还没有完全回到  $X^d$  之前,  $X^d$  自己又变了时,  $X$  是否能不停地追随  $X^d$ ”,这就是所谓的动态轨线跟踪问题. 直观上,如果系统是全局渐近稳定的话,它应该能够跟踪不断变化的  $X^d$ . 如果的确如此,接下来的问题是“如果希望跟踪误差自始至终不超过某个任意给定的值,即  $\|\Delta X\| < \varepsilon$ , 那么对系统的初始条件和  $X(t)$  的变化速度应该有什么样的限制呢?”关于这方面的早期研究工作有文献[10,11],最近的解析性初步结果由 DeMarco 和 Barmish 在文献[12,13]中论证. 由于深入下去探讨这些问题的答案将导致对一般非线性系统特性的研究,我们将在另一篇文章中专门探讨.

#### 四、模拟实验结果

模拟实验先是在一个三个自由度模型上进行. 选择这个模型有两个原因:一是工业机器人腕上的三个自由度对整个系统的动力学影响很小,所以为简单起见将其忽略;二是有意地令该模型的大臂和小臂长度相等,造成原点(0,0,0)为运动学奇点,以便观察预定直角坐标轨线通过奇点时的情况.

图 3 示出系统跟踪空间光滑曲线时的情况,机器人的末端速度为 20cm/s,最大跟踪误差约 3cm. 我们用各种运动速度进行了实验,观察到速度越高、误差越大.

图 4 示出的是当预定轨线是直线段,并且离奇点越来越近,以至最后通过奇点时的情形. 可以看到: 当以同样速度运动时,离奇点越近,误差越大,但跟踪的趋势不变.

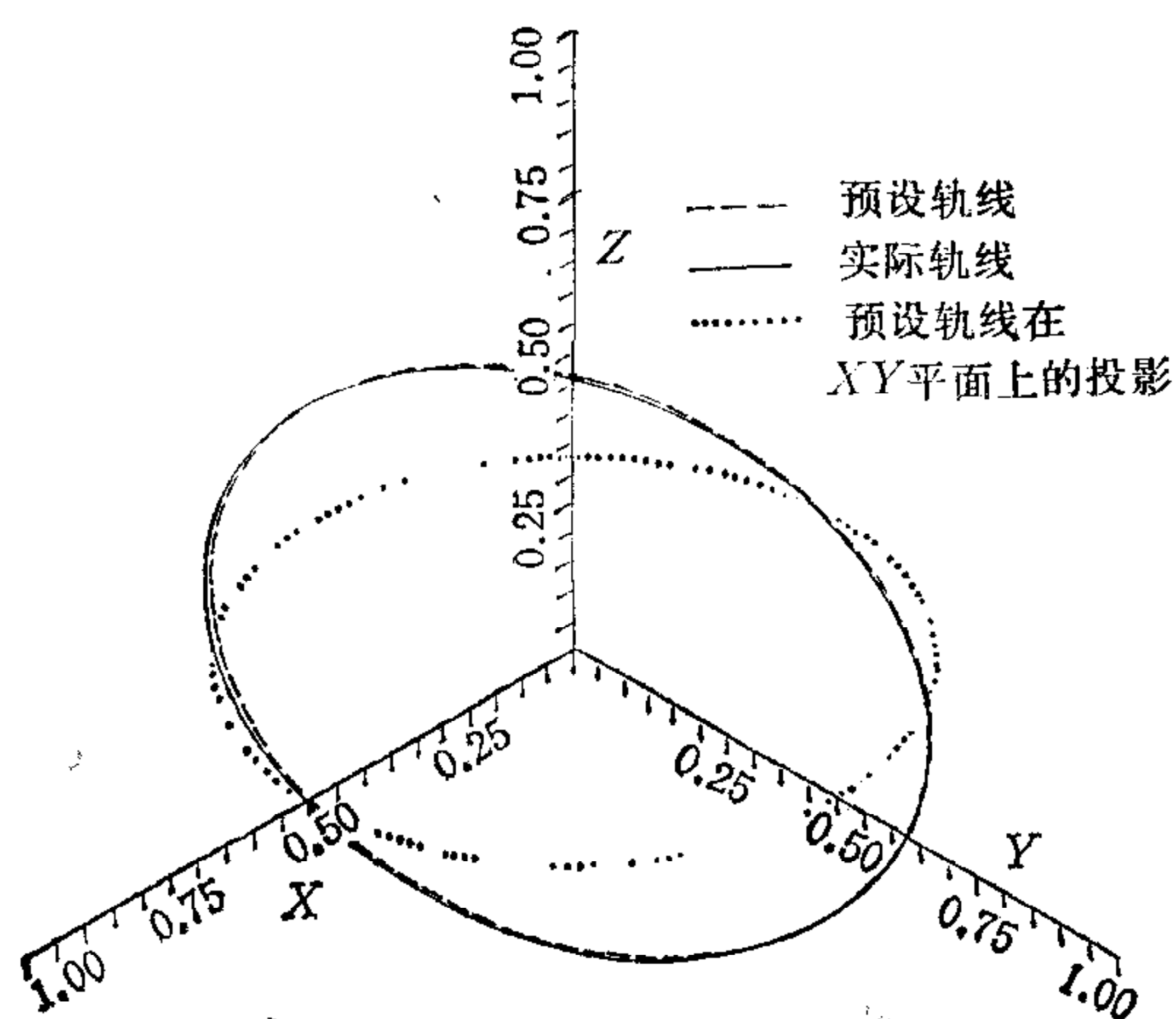


图 3 平滑轨线跟踪性能  
单位: 米

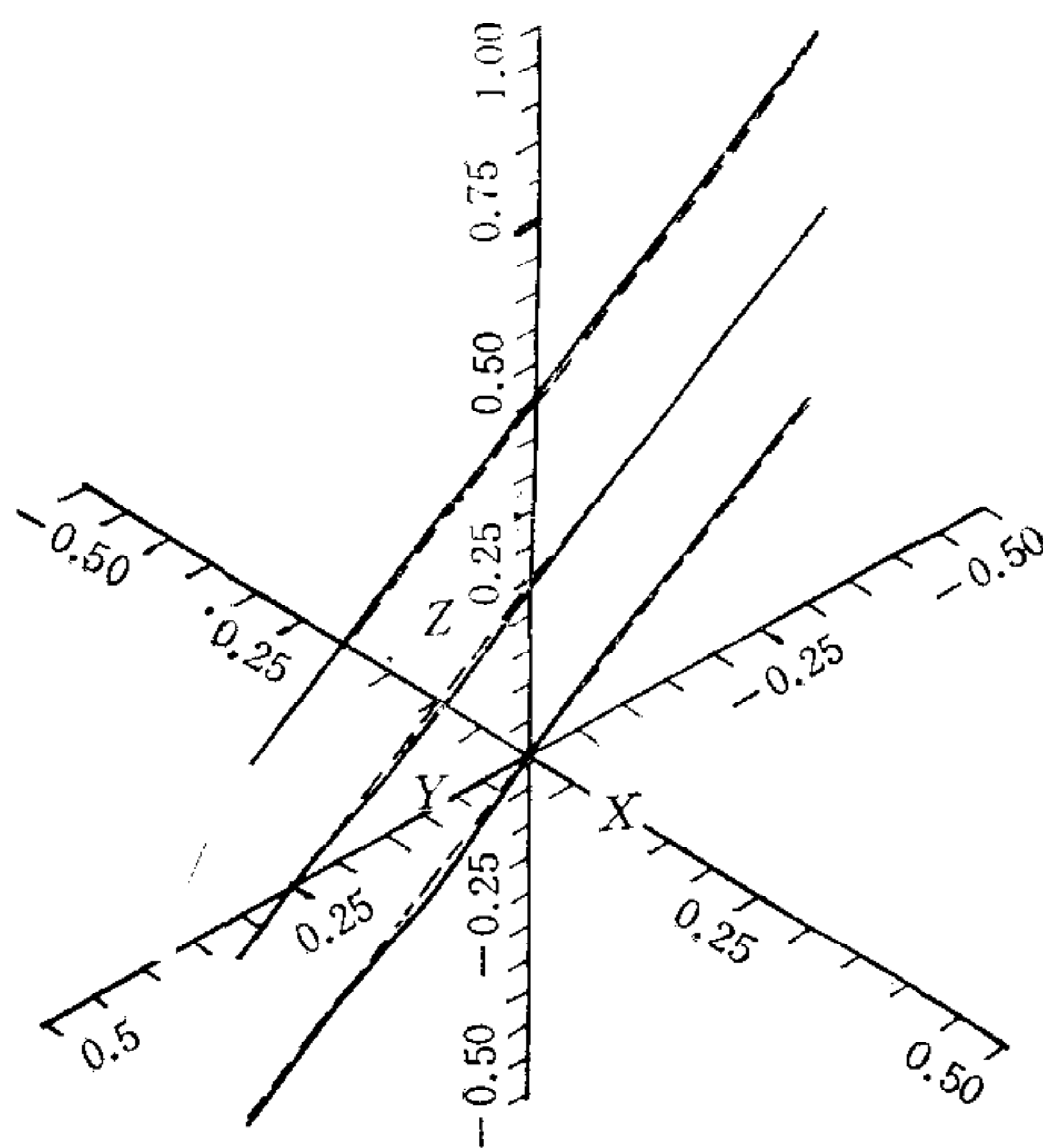


图 4 直线跟踪性能(三条直线由上而下接近奇点)  
单位: 米

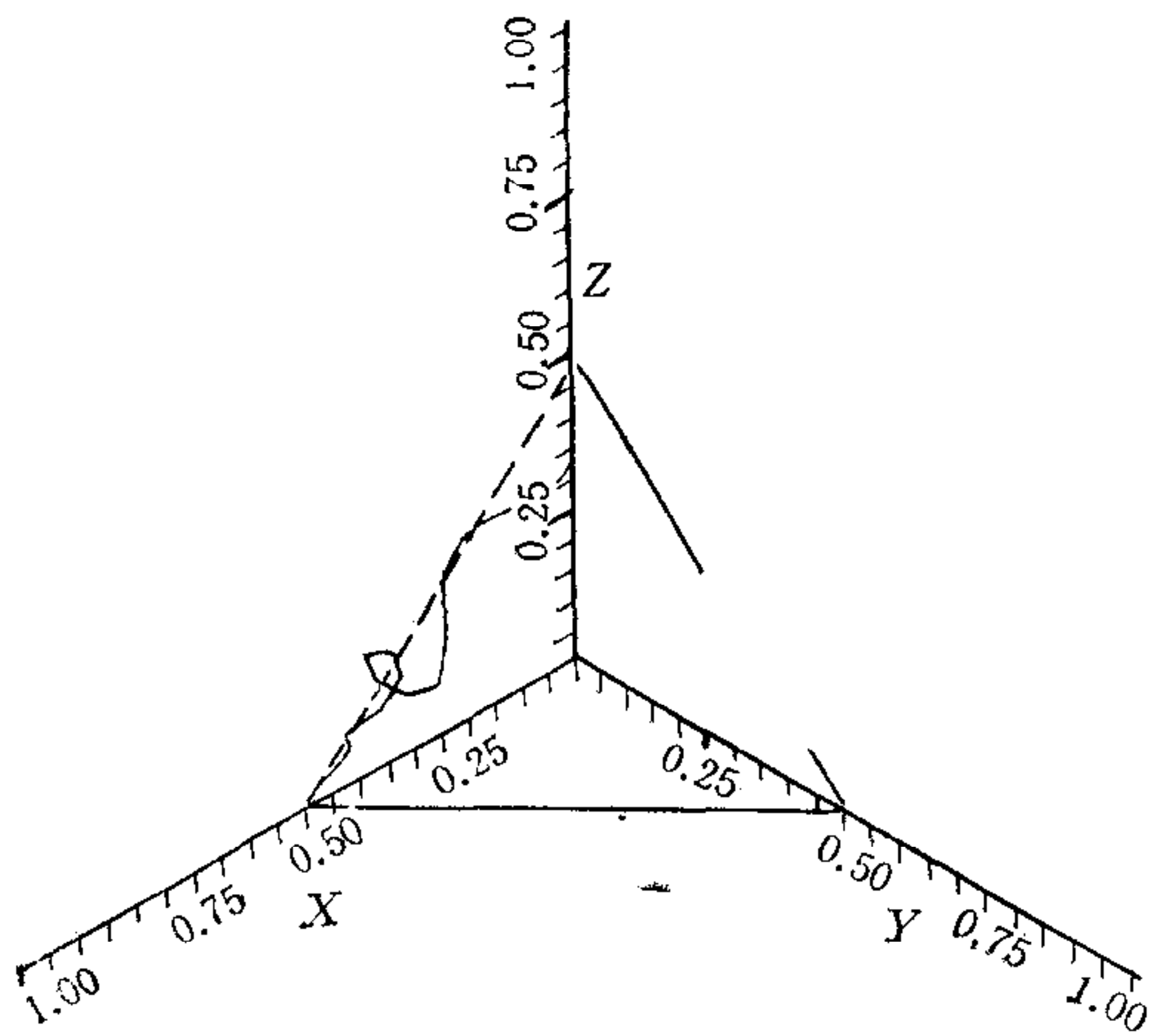


图 5 硬三角轨线跟踪性能  
单位: 米

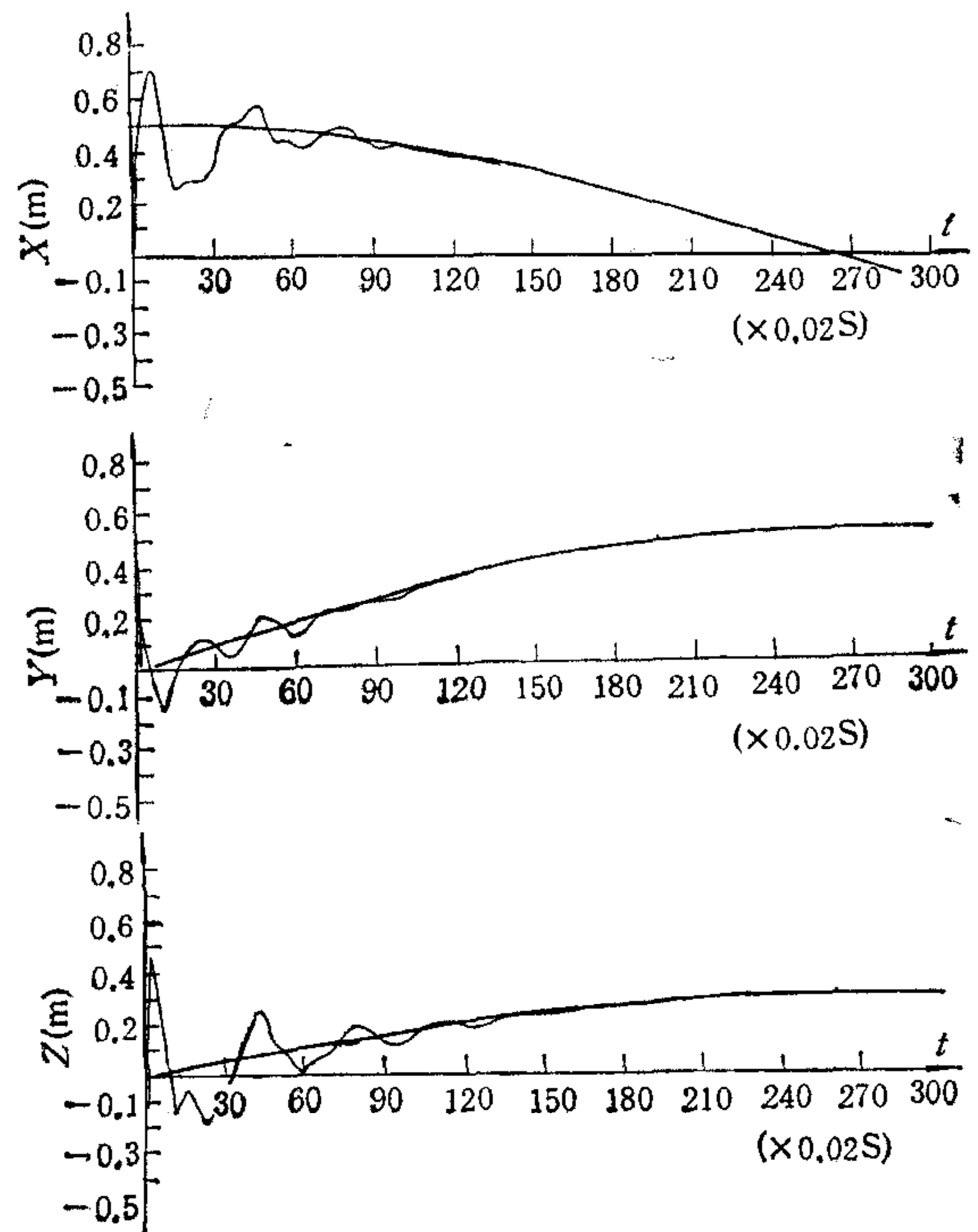


图 6 由静止状态跟踪某运动目标的情况

图 5 示出当机器人需要拐“死弯”时的情况。轨线由  $(0.5, 0, 0)$  到  $(0, 0.5, 0)$  再到  $(0, 0, 0.5)$ , 然后返回起始点。第一、二段跟踪很好, 第三段出了问题。为什么呢? Jacobian 矩阵的奇异值分解可告诉我们隐含在系统中的两个坐标空间(直角坐标和关节空间)变换出了问题。原来, 三个奇异值中的一个在第三个线段处降为零。这说明该方法还需完善, 当机器人末端接近奇异点或遇到图 5 所示的情形时, 它应该有主动放慢速度或扭转肩关节的附加机能。

作者还用 PUMA 560 模型进行了模拟实验, 被跟踪的曲线方程为

$$\begin{cases} x(t) = 0.5 \cos(0.1\pi t), \\ y(t) = 0.5 \sin(0.1\pi t), \\ z(t) = 0.3 \sin(0.1\pi t). \end{cases} \quad (17)$$

由控制算法可以看出, 控制力矩的大小在增益被固定的条件下是和位置的误差成正比的。这就使得在实际位置和目标位置很接近的情形下, 控制力矩变得很弱, 从而妨碍了误差的进一步减小, 限制了跟踪精度。但前面证明的全局稳定性容许我们可以任意地改变回路增益而不影响系统的稳定性, 这就给了我们很大的选择自由。为了既不产生过大的振荡, 又能迅速而准确地跟踪指定曲线, 我们选择了一个非线性回路增益, 其增益与误差的关系为

$$K_d = 300 \cdot (1 + 1/(0.07 + \|\Delta X\|)). \quad (18)$$

其实验结果令人满意(见图 6)。实验中, 机器人末端线速度为  $0.5\text{m/s}$ , 绝对距离误差小



于 1mm.

作者向 Wisconsin 大学 ECE 系的 DeMarco 教授致谢。DeMarco 教授和作者于 1987 年初开始 Error Bound Nonlinear Tracking Control 的研究工作, 本文是作者完成的该项工作的一部分结果。

### 参 考 文 献

- [1] Paul, R. P., Robot Manipulator: Mathematics, Programming and Control. MIT Press, Cambridge, Mass., 1981.
- [2] Kohli, D., and Soni, A. H., Photographic Image Enhancement by Superposition of Multiple Images, *Phot. Sci. Engr.*, 7(1975), 241—245.
- [3] Denavit, J., Description and Displacement Analysis of Mechanisms Based on  $2 \times 2$  Dual Matrices, Ph. D. Thesis, Mechanical Engineering Dept., North Western Univ. Evanston, Ill, 1965.
- [4] Yang, A. T. and Freudenstein, R., Application of Dual Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 31(1964), Series E, 152—157.
- [5] Vicker, J. J. et al., An Iterative Method for the Displacement Analysis of Spatial Mechanisms, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 31(1964), Series E, 309—314.
- [6] Lee, C. S. G. and Eiegler, M., A Geomtric Approach in Solving the Inverse Kinematics of PUMA Robots, *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, AES-20(1984), 695—706.
- [7] Khatib, O., Dynamic Control of Manipulators in Operational Space, Proc. 6-th World Cong. on Theory of Mechanics and Mechanisms, 1128—1131, 1983.
- [8] Whitney, D. E., Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses, *IEEE Trans. Man, Machine and Systems*, MMS-10(1969), 47—53.
- [9] Slotine, J. E., Putting Physics in Control—The Example of Robotics, *IEEE Control System Magsine*, 8(1983).
- [10] Vidyasagar, M., Nonlinear System Analysis, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1978.
- [11] Desoer C. A. and Vidyasagar, M., Feedback Systems: Input-output Properties, London: Academic Press, Inc., 1975.
- [12] DeMaco, C. L. and Barmish, B. R., A Result on Tracking Equilibria for Slowly Varying Nonlinear Systems, Proc. 1986 ACC, WP2, Seattle, June, 1986.
- [13] DeMaco C. L. and Barmish, B. R., Determining Stability of A Slowly Varying Nonlinear Systems, Through A Family of Linearizations, Univ. of Wisconsin, ECE Dept., 1986.

## A LYAPUNOV BASED CARTESIAN TREJACTORY CONTROL FOR ROBOT MANIPULATORS

LI YAOTONG HAN KE

(Institute of Automation, Academy of Sciences)

### ABSTRACT

This paper studies the feasibility of the trajectory control for robot manipulators in the operational space without coordinate transformation. We will first discuss the control algorithm proposed in this paper and its physical background. Second, we will show this control strategy is Lyapunov globally asymptotically stable. Third, some simulation results including that obtained on the PUMA 560 model will be illustrated and explained.

**Key words:** Robot control; operational space; trajectory tracking; Lyapunov stability.