第17卷 第1期
1991年 1 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 17, No. 1
Jan., 1991

脉冲响应函数辨识的随机 A-最优输入设计及其渐近性质

胡德文　　万百五　施 仁
（国防科技大学）　（西安交通大学）

摘　　要

本文研究了相关噪声下线性离散 SISO 系统脉冲响应函数辨识的随机 A-最优输入设计及其统计特性.

关键词: 辨识，最优化，实验设计，最优输入设计（OID）.

一、前　　言

早在1960年，Levin[1] 就考虑了线性离散 SISO 系统脉冲响应函数的最小二乘辨识问题，证明了当观测样本充分大时，利用白噪声作为输入信号能使在白色观测噪声下脉冲响应函数辨识的精度最高. 1975年，Wernstedt 和 Hoffmeyer-Zlotnik[2] 采用 D-最优输入，辨识人体血压系统的脉冲响应函数，据其理论分析，当系统放大倍数已知且观测噪声为白色时，辨识精度比采用同样长度的 m-序列提高近 50%.

笔者曾解决了白噪声干扰及系统放大倍数未知情况下的 D-最优输入设计（D-OID）问题[3]. 本文从有色噪声下脉冲响应函数辨识的有效算法时的 A-最优输入设计（A-OID）出发，进一步研究采用相关分析辨识法时的 A-OID 问题及辨识的统计特性.

二、有效算法与 A-OID

考虑线性离散 SISO 系统 MA 模型

$$y(t) = G(z)u(t) + H(z)\varepsilon(t), \tag{2.1}$$

其中

$$G(z) = \sum_{i=1}^{n} g_i z^{-i}. \tag{2.2}$$

$$H(\infty) = 1, \varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2). \tag{2.3}$$

所谓算法是有效的，即参数辨识的协方差矩阵为

$$\mathrm{cov}\hat{\beta} = M_{\beta}^{-1}. \tag{2.4}$$

本文于1987年10月8日收到.

其中 M_β 为参数向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的 Fisher 信息矩阵. 若记

$$\boldsymbol{\beta}^T \triangleq (\boldsymbol{g}^T, \boldsymbol{h}^T, \sigma^2), \qquad \boldsymbol{g}^T \triangleq (g_1, g_2, \cdots, g_n), \tag{2.5),(2.6}$$

$\boldsymbol{h}$ 为 $H(z)$ 中的参数组成的向量,则根据文献[4]可得

$$M_\beta = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial \bar{\omega}_t}{\partial \boldsymbol{\beta}}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_t}{\partial \boldsymbol{\beta}^T} + E_{Y|\beta}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial \tilde{\omega}_t}{\partial \boldsymbol{\beta}}\cdot\frac{\partial \tilde{\omega}_t}{\partial \boldsymbol{\beta}^T}\right] + \frac{N}{2\sigma^4}\cdot\frac{\partial \sigma^2}{\partial \boldsymbol{\beta}}\cdot\frac{\partial \sigma^2}{\partial \boldsymbol{\beta}^T}. \tag{2.7}$$

其中

$$\partial \bar{\omega}_t/\partial \boldsymbol{\beta} = H^{-1}(z)[\partial G(z)/\partial \boldsymbol{\beta}]u(t), \tag{2.8}$$

$$\partial \tilde{\omega}_t/\partial \boldsymbol{\beta} = H^{-1}(z)[\partial H(z)/\partial \boldsymbol{\beta}]\omega_t, \tag{2.9}$$

$$\omega_t = H^{-1}(z)[y(t) - G(z)u(t)] \sim N(0, \sigma^2). \tag{2.10}$$

这里的符号与文献[4]的略有不同.

利用公式(2.7)—(2.10)可以进一步证明，当参数向量 $\boldsymbol{\beta}$ 按(2.5),(2.6)式排列时，有

定理 1. 系统(2.1)—(2.3)式的 Fisher 信息矩阵为

$$M_\beta = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & N/(2\sigma^4) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

其中 $v(t) = H^{-1}(z)u(t)$,

$$M_1 = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N} v^2(t-1) & \sum_{t=1}^{N} v(t-1)v(t-2) & \cdots & \sum_{t=1}^{N} v(t-1)v(t-n) \\ \sum_{t=1}^{N} v(t-2)v(t-1) & \sum_{t=1}^{N} v^2(t-2) & \cdots & \sum_{t=1}^{N} v(t-2)v(t-n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{t=1}^{N} v(t-n)v(t-1) & \sum_{t=1}^{N} v(t-n)v(t-1) & \cdots & \sum_{t=1}^{N} v^2(t-n) \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

$$M_2 = \frac{N}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|z|=1} H^{-1}(z)\frac{\partial H(z)}{\partial h}H^{-1}(z^{-1})\frac{\partial H(z^{-1})}{\partial h^T}z^{-1}dz. \tag{2.13}$$

本定理的证明见附录 1.

下面讨论有效算法下的最优输入设计(OID)问题. 系统辨识的OID中,通常取[4,5]

$$J = \log\ \det\ \mathrm{cov}\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \qquad 或 \qquad J = \mathrm{tr}\ \mathrm{cov}\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.14),(2.15}$$

极小化作为输入设计的判据,分别称为 D-最优和 A-最优判据. 设计出的输入分别称为 D-最优输入和 A-最优输入. Goodwin 和 Payne[4] 研究了 D-OID 问题. 关于有色噪声下的 A-OID,有如下结论:

定理 2. 系统(2.1)—(2.3)在有效算法及功率约束

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u^2(t-k) \leqslant P_0, \quad \forall k \tag{2.16}$$

的条件下,其 A-最优输入为

$$u(t) = H(z)v(t). \tag{2.17}$$

其中 $v(t)$ 满足

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} v(t-i)v(t-j) = \begin{cases} P_1, & i=j=1-n, \\ 0, & i\neq j; i,j=1-n. \end{cases} \tag{2.18}$$

且 P_0 和 P_1 的关系满足 Parseval 能量恒等式

$$P_0 = \frac{P_1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|z|=1} H(z)H(z^{-1})z^{-1}dz. \tag{2.19}$$

证明见附录 2.

这里信号$\{u(t)\}$和$\{v(t)\}$是随机序列的一种实现，通过将伪随机序列随机化而得到.

定理 3. 在定理 2 的条件下，系统(2.1)—(2.3)的控制部分参数向量 $\boldsymbol{g}$ 的估计的协方差阵为

$$\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{g}} = \frac{\sigma^2}{P_1\cdot N}\cdot I. \tag{2.20}$$

各脉冲响应函数均方误差和为

$$J_A = \operatorname{tr}\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{g}} = (n/N)\cdot(\sigma^2/P_1). \tag{2.21}$$

证明. 将(2.18)式代入(2.12)式中，得

$$M_1 = (P_1\cdot N/\sigma^2)\cdot I. \tag{2.22}$$

又，据定理 1 的(2.11)式可知

$$M_{\beta}^{-1} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & M_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma^4/N \end{bmatrix}.$$

在(2.5)式的记法下，有

$$\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{g}} & \operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{g}},\hat{\boldsymbol{h}}) & \operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{g}},\hat{\sigma}^2) \\ \operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\boldsymbol{g}}) & \operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{h}} & \operatorname{cov}(\hat{\boldsymbol{h}},\hat{\sigma}^2) \\ \operatorname{cov}(\hat{\sigma}^2,\hat{\boldsymbol{g}}) & \operatorname{cov}(\hat{\sigma}^2,\hat{\boldsymbol{h}}) & \operatorname{cov}\hat{\sigma}^2 \end{bmatrix}.$$

在有效算法下，(2.4)式成立，从而有

$$\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{g}} = M_1^{-1} = [\sigma^2/(P_1\cdot N)]\cdot I,$$

即证得(2.20)式. 考虑到其中的单位矩阵为 n 维的，$\operatorname{tr}I = n$，即证得(2.21)式. Q.E.D.

由于在一般算法下，有 $\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}} \geqslant M_{\beta}^{-1}$，即有$\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{g}} \geqslant M_1^{-1}$，因此，在一般算法以及一般输入$\{u(t)\}$下，有

$$J_A = \operatorname{tr}\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{g}} \geqslant (n/N)\cdot(\sigma^2/P_1). \tag{2.23}$$

三、相关分析与 A-OID

本节研究当噪声模型 $H(z)$未知时，脉冲响应函数的辨识及其 A-OID.

考虑 SISO 系统脉冲响应函数模型

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k u(t-k) + e(t), \quad e(t) = H(z)\varepsilon(t). \qquad (3.1),(3.2)$$

其中$\{\varepsilon(t)\}$为零均值白噪声，即

$$E\{\varepsilon(t)\}=0,\quad E\{\varepsilon(t)\varepsilon(t-\tau)\}=\sigma^2\delta(\tau). \tag{3.3}$$

$\delta(\tau)$为 Kronecker δ-函数．噪声$\{e(t)\}$的自相关函数为

$$r(\tau)=E\{e(t)e(t-\tau)\}. \tag{3.4}$$

如果 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k=0$，且 $H(z)$ 是平稳多项式，那么可以取某个整数 n 作为系统过渡过程时间．模型(3.1)—(3.2)化为

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n} g_k u(t-k)+e(t). \tag{3.5}$$

且

$$H(z)=h_0+h_1z^{-1}+\cdots+h_{n-1}z^{-(n-1)}. \tag{3.6}$$

当$|\tau|\geqslant n$时，

$$r(\tau)=0. \tag{3.7}$$

若采用相关分析法，则有等式

$$R_{yu}(m)=\sum_{k=1}^{n} g_k R_{uu}(m-k)+\xi(m). \tag{3.8}$$

其中

$$R_{yu}(m)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)u(t-m), \tag{3.9}$$

$$R_{uu}(m)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)u(t-m), \tag{3.10}$$

$$\xi(m)\triangleq\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e(t)u(t-m). \tag{3.11}$$

N为输出值 $y(t)$ 的观测样本数；N/n 为整数．

定理 4. 在输入$\{u(t)\}$满足(2.16)式的条件下，若

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} u(i-m)u(j-m)=\begin{cases}P_0, & i=j,\\ 0, & 0<|i-j|<n \text{ 时},\end{cases} \tag{3.12}$$

则$\{u(t)\}$为脉冲响应函数相关分析辨识的 A-最优输入，且 $\boldsymbol{g}$ 的相关分析估值为

$$\hat{\boldsymbol{g}}=P_0^{-1}\boldsymbol{R}_{yu}=P_0^{-1}[R_{yu}(1),R_{yu}(2),\cdots,R_{yu}(n)]^T. \tag{3.13}$$

证明(采用比较的方法证明)．在(3.12)式中取 $j=i-\tau$，并令 $i=kn+1, k=1-N/n$，即有

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} u(kn+1-m)u(kn+1-\tau-m)=\begin{cases}P_0, & \tau=0,\\ 0, & 0<\tau<n.\end{cases}$$

上式两边同时求 $\frac{n}{N}\sum\limits_{k=1}^{N/n}(\cdot)$，即有

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t)u(t-\tau)=\begin{cases}P_0, & \tau=0,\\ 0, & 0<\tau<n.\end{cases}$$

代入式(3.8)中，当 $m=1,2,\cdots,n$ 时，得到 $R_{yu}(m)=P_0g_m+\xi(m)$．

因 $E\{\xi(m)\}=\frac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N} E\{e(t)\}u(t-m)=0$，从而 g_m 的无偏估计为 $\hat{g}_m=P_0^{-1}R_{yu}$．

(m)，即(3.13)式成立。

若定义 $\boldsymbol{\xi} \triangleq [\xi(1), \xi(2), \cdots, \xi(n)]^T$，则 $\boldsymbol{\xi} = P_0(\hat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g})$，从而

$$J_A = \mathrm{tr}\,\mathrm{cov}\,\hat{\boldsymbol{g}} = \mathrm{tr}E\{(P_0^{-1}\boldsymbol{\xi}) \cdot (P_0^{-1}\boldsymbol{\xi})^T\} = P_0^{-2} \sum_{m=1}^{n} E\{\boldsymbol{\xi}^2(m)\}$$

$$= P_0^{-2} \sum_{m=1}^{n} E\left\{\left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} e(t)u(t-m)\right]^2\right\}$$

$$= P_0^{-2} \sum_{m=1}^{n} E\left\{\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} e(i)e(j)u(i-m)u(j-m)\right\}$$

$$= (P_0N)^{-2}n \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} u(i-m)u(j-m)E\{e(i)e(j)\}$$

$$= (P_0N)^{-2}n \sum_{\substack{i,j=1 \\ |i-j|<n}}^{N} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} u(i-m)u(j-m)r(i-j)$$

$$+ (P_0N)^{-2}n \sum_{\substack{i,j=1 \\ |i-j|\geqslant n}}^{N} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} u(i-m)u(j-m)r(i-j).$$

考虑到(3.7)式，知上式第二部分为零．将(3.12)式代入上式第一项中，则得到

$$J_A = (P_0N)^{-2}n \sum_{t=1}^{N} P_0 r(0) = (n/N)(r(0)/P_0).$$

由 Parseval 能量恒等式得知，噪声$\{e(t)\}$的功率为 $r(0) = \dfrac{\sigma^2}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{|z|=1} H(z)H(z^{-1}) \cdot z^{-1}dz$。再根据(2.19)式，即得 $r(0) = \sigma^2 P_0/P_1$。从而，$J_A = (n/N) \cdot (\sigma^2/P_1)$．与(2.21)和(2.22)式比较，即知相关分析辨识法及输入满足(3.12)式的条件下的 J_A 值达到了最小值．因此，满足(3.12)式的$\{u(t)\}$是脉冲响应函数辨识的 A-最优输入． Q.E.D.

定理 5. 在定理 4 的条件下，系统(3.1)—(3.3)的脉冲响应函数向量 $\boldsymbol{g}$ 的估计 $\hat{\boldsymbol{g}}$ 具有如下统计特性：

1）无偏性，$E\{\hat{\boldsymbol{g}}\} = \boldsymbol{g}$； (3.14)

2）均方收敛性，$\hat{\boldsymbol{g}} \xrightarrow{\text{q.m.}} \boldsymbol{g}$； (3.15)

3）强一致性，$\hat{\boldsymbol{g}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \boldsymbol{g}$； (3.16)

4）渐近正态性，$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g}) \sim AsN(0, \Omega)$． (3.17)

其中

$$\Omega = P_0^{-1} \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(n-1) \\ r(1) & r(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r(1) \\ r(n-1) & \cdots & r(1) & r(0) \end{bmatrix}; \tag{3.18}$$

5）均方误差达到最小方差界下界，即达到各种算法 $\mathscr{F}$ 及各种输入 U 下的最小值

$$\operatorname{tr}\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{g}} = \min_{f \in \mathscr{F}} \min_{\{u(t)\} \in U} \operatorname{tr}\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{g}} = (n/N)\cdot(r(0)/P_0). \tag{3.19}$$

证明. 性质 1)和性质 5)实际上在定理 4 的证明中已得到，由式(3.19)取 $N \to \infty$ 即得到性质 2)。若令

$$\eta(k) \triangleq [e(k)u(k-1), e(k)u(k-2), \cdots, e(k)u(k-n)]^T,$$

即有

$$\boldsymbol{\xi} = P_0(\hat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta(k).$$

由(3.6)式或(3.7)式知 $\{\eta(k)\}$ 具有 n 步相依关系，可用多变量 MA 模型表示 $\eta(k) = \sum_{i=1}^{n} G_i X(k-i+1)$. 其中$\{X(k)\}$为独立同分布向量序列

$$E\{X(k)\} = 0, \quad E\{X(k)X(k-\tau)\} = I\cdot\delta(\tau).$$

这时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} G_i X(k-i+1) \\ &= \frac{1}{N}[G_1X(N) + (G_1+G_2)X(N-1) + \cdots \\ &\quad + (G_1+\cdots+G_n)X(N-n+1) + \cdots \\ &\quad + (G_1+\cdots G_n)X(1) + \cdots \\ &\quad + (G_{n-1}+G_n)X(2-n) + G_nX(1-n)].\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\xi}$ 的特征函数为

$$\Phi_{\boldsymbol{\xi}}(s) = E\{\exp(js^T\boldsymbol{\xi})\}, \quad (j \text{ 为 } \sqrt{-1}).$$

考虑到 $X(N), X(N-1), \cdots, X(N-n+1), \cdots, X(1), \cdots, X(2-n), X(1-n)$ 为独立同分布的，有

$$\begin{aligned}\Phi_{\boldsymbol{\xi}}(s) &= E\{\exp[js^TG_1N^{-1}X(N)\}\cdot E\{\exp[js^T(G_1+G_2)N^{-1}X(N-1)]\}\cdots \\ &\quad \cdots E\{\exp[js^T(G_1+\cdots+G_n)N^{-1}X(N-n+1)]\}\cdots \\ &\quad \cdots E\{\exp[js^T(G_1+\cdots+G_n)N^{-1}X(1)]\}\cdots E\{\exp[js^T(G_{n-1}+G_n) \\ &\quad \cdot N^{-1}X(2-n)]\} E\{\exp[js^TG_nN^{-1}X(1-n)]\} \\ &= \Phi_X(G_1N^{-1}s)\cdots\{\Phi_X[(G_1+\cdots+G_n)N^{-1}s]\}^{N-n}\cdots\Phi_X(G_nN^{-1}s).\end{aligned}$$

定义. $\Psi_X(s) \triangleq \log\Phi_X(s)$，则对于小$\|s\|$，有

$$\begin{aligned}\Psi_X(s) &= \log E\left\{1 + js^TX - \frac{1}{2}(s^TX)^2 + o(\|s\|^3)\right\} \\ &= \log\left[1 - \frac{1}{2}s^Ts + o(\|s\|^3)\right] = -\frac{1}{2}s^Ts + o(\|s\|^3),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\Psi_{\boldsymbol{\xi}}(s) &= \log\Phi_{\boldsymbol{\xi}}(s) = \log\Phi_X(G_1N^{-1}s) + \cdots + (N-n)\log\Phi_X \\ &\quad \cdot[(G_1+\cdots+G_n)N^{-1}s] + \cdots + \log\Phi_X(G_nN^{-1}s) \\ &= \Psi_X(G_1N^{-1}s) + \cdots + (N-n)\Psi_X[(G_1+\cdots \\ &\quad + G_n)N^{-1}s] + \cdots + \Psi_X(G_nN^{-1}s).\end{aligned}$$

显然,当 $N\to\infty$ 时,$\Psi_X(G_1N^{-1}s),\cdots,\Psi_X(G_nN^{-1}s)$ 这些有限项的值均趋于零,其和为 $o(\|N^{-2}\|)$. $\Psi_{\xi}(s)$的值被主项$(N-n)\Psi_X[(G_1+\cdots+G_n)N^{-1}s]$控制着,而

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}N(N-n)\Psi_X[(G_1+\cdots+G_n)N^{-1}s]\\&=\lim_{N\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}\frac{N-n}{N}s^T[(G_1+\cdots+G_n)^T(G_1+\cdots\right.\\&\quad\left.+G_n)]s+o\left(\frac{N-n}{N^2}\|s\|^3\right)\right\}\\&=-\frac{1}{2}s^T[(G_1+\cdots+G_n)^T(G_1+\cdots G_n)]s.\end{aligned}$$

故 $\Phi_{\xi}(s)\doteq\exp\left\{-\frac{1}{2}s^T[(G_1+\cdots+G_n)^T(G_1+\cdots+G_n)N^{-1}]s\right\},\quad(N\gg n).$

渐近正态性得证. 又 $\Omega=N\cdot E\{(\hat{g}-g)(\hat{g}-g)^T\}=N\cdot P_0^{-2}E\{\xi\cdot\xi^T\}$.

因
$$\begin{aligned}E\{\xi(i)\xi(j)\}&=E\left\{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}e(t)u(t-i)\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e(k)u(k-j)\right\}\\&=N^{-2}\sum_{t,k=1}^{N}u(t-i)u(k-j)r(t-k).\end{aligned}$$

根据(3.7)和(3.12)式,有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}N\cdot E\{\xi(i)\xi(j)\}&=\frac{1}{N}\sum_{\substack{t,k=1\\|t-k|<n}}^{N}u(t-i)u(k-j)r(t-k)\\&=\frac{1}{N}\sum_{\substack{t,k=1\\|t-k|<n}}^{N}P_0\delta(t-i-k+j)r(t-k)=P_0\cdot r(i-j).\end{aligned}$$

从而证得(3.18)式.

当 $N\to\infty$ 时,只须注意到$\{u(t)\}$是具有 n 步独立关系的自相关函数各态历经性序列及$\{e(t)\}$是仅有 n 步相依关系的平稳随机序列,可证明每个 $\hat{g}_i$ 值是强一致收敛的,即证得性质 3). Q.E.D.

四、结 论

本文得到了五条基本定理. 其中,定理 1 表明有效算法下控制部分参数 $\boldsymbol{g}$ 与噪声参数 $\boldsymbol{h},\sigma^2$ 的辨识误差是互不相关的,OID 只须针对 $\boldsymbol{g}$ 的辨识进行. 定理 2 表明有效算法下 A-OID与 $\boldsymbol{g}$ 本身无关但与噪声模型 $H(z)$ 仍有关. 定理 3 和定理 5 的性质 5)的物理意义是,脉冲响应函数辨识的均方误差和在 A-OID 下,等于阶数样本数比(n/N)乘噪声信号功率比 $(r(0)/P_0)$. 本文作者曾对一个二阶系统脉冲响应函数在有色噪声下仿真 40 次,其平均值 $\bar{J}_A$ 比采用同样长度的m序列提高 60% 以上. 定理 5 中的性质 1)—4) 在采用"相关分析——最小二乘两步法"辨识 ARMAX 模型时是非常有用的. 本文最重要的定理 4,得到的 A-最优输入与参数$\boldsymbol{\beta}$无关,可由伪随机序列得到,其脉冲响应函数的辨识公式也较简单.

附　　录　　1

定理 1 的证明.

$$\because\quad \partial G(z)/\partial\beta^T=[\partial G(z)/\partial \boldsymbol{g}^T,\partial G(z)/\partial \boldsymbol{h}^T,\partial G(z)/\partial(\sigma^2)]=[z^{-1},z^{-2},\cdots,z^{-n},0,\cdots,0,0],$$

$$\partial H(z)/\partial\beta^T=[\partial H(z)/\partial \boldsymbol{g}^T,\partial H(z)/\partial \boldsymbol{h}^T,\partial H(z)/\partial(\sigma^2)]=[0,0,\cdots,0,\partial H(z)/\partial \boldsymbol{h}^T,0],$$

$$\partial(\sigma^2)/\partial\beta^T=[\partial(\sigma^2)/\partial \boldsymbol{g}^T,\partial(\sigma^2)/\partial \boldsymbol{h}^T,\partial(\sigma^2)/\partial(\sigma^2)]=[0,0\cdots,0,0,\cdots,0,1],$$

$$\therefore\quad \partial\bar{\omega}_t/\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}^T=[v(t-1),\cdots,v(t-n),0,\cdots,0,0],\ \text{即}$$

$$(2.7)\ \text{式第一项}=\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

据 Parseval 能量恒等式，有

$$E_{Y|\beta}\left\{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial\tilde{\omega}_t}{\partial \boldsymbol{h}}\frac{\partial\tilde{\omega}_t}{\partial \boldsymbol{h}^T}\right\}=E_{Y|h}\left\{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{N}\left[H^{-1}(z)\frac{\partial H(z)}{\partial \boldsymbol{h}}\omega_t\right]\left[H^{-1}(z)\frac{\partial H(z)}{\partial \boldsymbol{h}}\omega_t\right]^T\right\}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{t=1}^{N}E\left\{\left[H^{-1}(z)\frac{\partial H(z)}{\partial \boldsymbol{h}}\omega_t\right]\left[H^{-1}(z)\frac{\partial H(z)}{\partial \boldsymbol{h}}\omega_t\right]^T\right\}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\oint_{|z|=1}\left[H^{-1}(z)\frac{\partial H(z)}{\partial \boldsymbol{h}}\right]\cdot E\{\omega_t^2\}\cdot\left[H^{-1}(z^{-1})\frac{\partial H(z^{-1})}{\partial \boldsymbol{h}}\right]^T\cdot z^{-1}dz=M_2,$$

即

$$(2.7)\ \text{式第二项}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & M_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

从而

$$M_\beta=\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & M_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{N}{2\sigma^4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0\\ 0 & M_2 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{N}{2\sigma^4}\end{bmatrix}.$$

附　　录　　2

定理 2 的证明.

考虑 A-最优判据(2.15)式，根据定理 1，有

$$J=\operatorname{tr}\operatorname{cov}\hat{\boldsymbol{\beta}}=\operatorname{tr}M_1^{-1}+\operatorname{tr}M_2^{-1}+2\sigma^4/N.$$

将输入$\{u(t)\}$的约束(2.16)转化为$\{v(t)\}$的约束

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}v^2(t-i)\leqslant P_1,\quad i=1-n.$$

记$M_1\triangleq\{m_{ij}\}_{n\times n}$，$m_{ij}$为$M_1$的第$i$行$j$列元素. 构造 Lagrange 函数

$$L(M_1,\lambda)=J+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}v^2(t-i)-P_1\right]=J+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(m_{ii}\sigma^2-P_1).$$

其中λ_i，$i=1-n$，为 Lagrange 乘子. $L(M_1,\lambda)$极小值存在的必要条件为

$$\partial L(M_1,\lambda)/\partial m_{ij}=0,\quad i,j=1-n,\quad \text{即}\quad \partial L(M_1,\lambda)/\partial M_1=0.$$

从而$-M_1^{-2}+\sigma^2\cdot\operatorname{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}=0$. 这说明$M_1$是非奇异的对角线矩阵，且$\lambda_i\neq0$，$i=1-n$. 根据 Kuhn-Tucker 定理，又有

$$\lambda_i(\sigma^2\cdot m_{ii}-P_1)=0,\quad \text{及}\quad \lambda_i\geqslant0,\quad i=1-n.$$

因而必有 $\sigma^2 \cdot m_{ii} - P_1 = 0, \ M_1 = P_1 I/\sigma^2.$

这就证明了(2.18)式. 因目标函数与约束条件均为凸函数,故上面的条件也是充分的. 利用$\{v(t)\}$的随机性及 Parseval 能量恒等式,可证明(2.19)成立.

参 考 文 献

[1] Levin, M. J., Optimal Estimation of Impulse Response in the Presence of Noise, *IRE Trans.* CT-7(1960), 50—56.

[2] Wernstedt, J. and Hoffmeyer-Zlotnik, H. J, A New Variant for the Use of D-Optimal Factorial Designs in Estimating Dynamic Multivariable System. Proc. of the IFAC 6th World Congress, Pt.2 (1975), Session 11.5.

[3] 胡德文、施仁,MA-模型最优输入信号设计研究,国防科技大学学报,1987年第2期,33—40.

[4] Goodwin, G. C. and Payne, R. L., Dynamic System Identification——Experimental Design and Data Analysis, Academic Press (1977), New York.

[5] Mehra, R. K., Optimal Input Signals for Parameter Estimation in Dynamic System——Survey and New Results, *IEEE Trans. Auto. Contr.* AC-19(1974), 753—768.

STOCHASTIC A-OPTIMAL INPUT DESIGN FOR IDENTIFYING THE IMPULSE RESPONSE FUNCTIONS OF SISO SYSTEMS AND THE ASYMPTOTIC PROPERTIES

HU DEWEN

(National University of Defence Technology)

WAN BAIWU SHI REN

(Xi'an Jiaotong University)

ABSTRACT

This paper studies the stochastic A-optimal input designs for identifying the impulse response functions of linear time-discrete SISO systems and the identification statistic properties in face of coloured noise.

Key words: Identification; optimization; experimental design; optimal input design (OID).