第 17 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 1
1991 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1991

非线性广义系统最优控制的最大值原理——有限维情形

李训经 彭实戈
(复旦大学数学研究所，上海)

摘 要

本文利用 Ekeland 变分原理和 Fattorini 引理处理非线性广义系统最优控制问题，给出该问题解适合最大值原理的证明.

关键词: 广义系统,最优控制,最大值原理，Ekeland 变分原理.

一、引 言

最优控制理论的最大值原理，是 Л. С. Понтрягин 等[1]在六十年代取得的重要结果. 所讨论的系统是

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\ v(t)),$$

$$x(0)=x_0.$$

但是,在许多实际系统中,由于某些状态变量的惯性很小,所以将其忽略,而得到关系式

$$g(x(t),v(t))=0,$$

这样就产生广义系统. 在上述讨论中,如果不忽略小的惯量,就要研究带小参数的最优控制问题,它的极限系统是广义系统.

对于线性广义系统的二次最优控制问题,已有文献[2]讨论. 关于非线性广义系统的最优控制问题,文献[3]用凸锥分离性进行讨论,但尚未见一般的讨论.

本文的目的在于，指出 Ekeland 变分原理和 Fattorini 引理在广义系统最大值原理证明中的作用. 将该方法用到分布参数的广义系统和随机广义系统将另文介绍.

Ekeland 变分原理. 设 $(V,d(\cdot,\cdot))$ 是完备的距离空间. $F:V\to\boldsymbol{R}$ 是下半连续的,且下方有界. 如果对于 $\varepsilon>0$ 和 $u\in V$ 满足

$$F(u)\leqslant \inf F(v)+\varepsilon,$$

那末存在 $u^\varepsilon\in V$，使得

(i) $F(u^\varepsilon)\leqslant F(u)$,

本文于 1988 年 9 月 19 日收到.

(ii) $d(u^{\varepsilon},u)\leqslant\sqrt{\varepsilon}$,

(iii) $F(v)+\sqrt{\varepsilon}\,d(u^{\varepsilon},v)>F(u^{\varepsilon})$ 对于 $v\neq u^{\varepsilon}$ 皆成立.

Fattorini 引理. 设△是 Hilbert 空间X中具有有限余维数的凸闭集. 设 $ln\in X$, 并且存在常数 $C>0$ 和 $c>0$ 使得

$$c\leqslant\|l_n\|\leqslant C,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle l_n,x\rangle=\langle l,x\rangle,\forall x\in X,$$

$$\langle l_n,x\rangle\geqslant-\varepsilon_n,\quad\forall x\in\Delta,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,$$

那末 $l\neq 0$. 证明见文献[4]和[5].

二、问题的叙述

考虑系统

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),v(t)),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\tag{2.1}$$

$$x(0)=x_0,$$

约束条件是

$$G(x(1))=0,\tag{2.2}$$

$$g(x(t),v(t))=0\tag{2.3}$$

$$\varphi(x(t),v(t))\leqslant 0.\tag{2.4}$$

容许控制集合为

$$U_{ad}\subset L^{\infty}([0,1];\boldsymbol{R}^k),$$

且 U_{ad} 在 $L^2([0,1];\boldsymbol{R}^k)$ 中为具有有限余维数的凸闭集.

最优控制问题. 在 U_{ad} 中选取 $u(\cdot)$ 使得

$$J(u(\cdot))=\inf\{J(v(\cdot))\mid v(\cdot)\in U_{ad}\},$$

其中 $J(v(\cdot))=h(x(1))$, $(v(\cdot),x(\cdot))$ 满足(2.1)—(2.4)式

假设

$$f:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^n,\quad g:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^m,$$

$$\varphi:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R},\quad G:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^d,\qquad h:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$$

是连续可微的,并且存在常数 $\beta>0$ 使

(i) $g_v(x,v)g_v^*(x,v)\geqslant\beta I_m$, $\forall(x,v)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^k$,

(ii) $\Phi_v(x,v)\Phi_v^*(x,v)\geqslant\beta I_{m+1}$, $\forall(x,v)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^k$, 且 $\varphi(x,v)=0$, (2.5)

其中 $\Phi=\begin{pmatrix}g\\ \varphi\end{pmatrix}$.

最大值原理. 设 $(u(\cdot),y(\cdot))$ 是最优控制问题的解,那末存在 $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $r(\cdot)$ 和 μ,ν,它们不全为零,适合

$$-\frac{dp(t)}{dt}=\frac{\partial H(y(t),u(t),p(t),q(t),r(t))}{\partial x},\tag{2.6}$$

$$p(1) = \mu \frac{\partial h(y(1))}{\partial x} + \frac{\partial G(y(1))}{\partial x} \nu. \tag{2.7}$$

这里

$$H(x,v,p,q,r) = \langle p, f(x,v)\rangle + \langle q, g(x,v)\rangle + r\varphi(x,v),$$

并且对于 $v(\cdot) \in U_{ad}$ 有

$$\int_0^1 \left\langle \frac{\partial H(y(t),u(t),p(t),q(t),r(t))}{\partial v},\ v(t) - u(t) \right\rangle dt \geqslant 0. \tag{2.8}$$

而不等式

$$r(t) \geqslant 0 \tag{2.9}$$

和等式

$$r(t)\varphi(y(t),u(t)) = 0 \tag{2.10}$$

在[0,1]上几乎处处成立.

注. 从最大值原理看,待定的函数为 $u(\cdot),y(\cdot),p(\cdot),q(\cdot)$ 和 $r(\cdot)$, 共 $k+2n+m+1$ 个;待定的参数为 μ 和 ν, 共 $d+1$ 个. 在最大值原理中. 确定函数的微分方程有

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t),\ u(t)), \tag{2.11}$$

$$y(0) = x_0 \tag{2.12}$$

及式(2.6),共有 $2n$ 个微分方程, 它们及式(2.7),(2.12)是用来确定函数 $y(\cdot)$, $p(\cdot)$ 的. 又式(2.10)是用来确定 $r(\cdot)$ 的. 约束条件

$$g(y(t),\ u(t)) = 0 \tag{2.13}$$

表明 $y(\cdot)$ 和 $u(\cdot)$ 适合 m 个函数关系, 它用来确定 H 中的 m 个待定函数 $q(\cdot)$,不等式(2.8)用来确定 $u(\cdot)$. d 个等式

$$G(y(1)) = 0 \tag{2.14}$$

用来确定 d 维向量 ν. 最后剩下一个参数 μ, 由于式(2.6)—(2.8)中容许一个自由参数, 所以不必去确定它. 总之,从方程个数看,式(2.6)—(2.14)足以确定 $y(\cdot)$, $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $r(\cdot)$, $u(\cdot)$ 和 ν. 自然,这种讨论是不严格的,正如文献[1]关于最大值原理中方程个数的议论.

三、化为无约束近似最优控制问题

首先,引入松弛变量 $\xi(\cdot)$,

$$\xi(t) + \varphi(x(t),\ v(t)) = 0, \tag{3.1}$$

这时 $\xi(\cdot) \in L^\infty([0,1];\boldsymbol{R})$, 且 $\xi(t) \geqslant 0$.

记

$$w(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{w}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix},$$

其中 $\zeta(t) + \varphi(y(t),u(t)) = 0$.

对于 $\varepsilon > 0$，考虑指标

$$J^{\varepsilon}(w(\cdot)) = \left[(h(x(1)) - h(y(1)) + \varepsilon)^2 + \int_0^1 |g(x(t),\ v(t))|^2 dt + \int_0^1 |\xi(t) + \varphi(x(t), v(t))|^2 dt + G^2(x(1))\right]^{\frac{1}{2}}$$

的无约束最优控制问题. 这时

$$0 \leqslant \inf J^{\varepsilon}(w(\cdot)) \leqslant J^{\varepsilon}(\bar{w}(\cdot)) = \varepsilon. \tag{3.2}$$

如果记

$$d(w_1(\cdot),\ w_2(\cdot)) = \text{mes}\{t \in [0,1] \mid w_1(t) \neq w_2(t)\},$$

那末 $V = \{w(\cdot) \mid v(\cdot) \in U_{ad},\ \xi(t) \geqslant 0,\ \xi(\cdot) \in L^{\infty}([0,\ 1];\ \boldsymbol{R})\}$ 构成完备的距离空间. 由(3.2)式,根据 Ekeland 变分原理，存在 $w^{\varepsilon}(\cdot)$ 使得

(i) $J^{\varepsilon}(w^{\varepsilon}(\cdot)) \leqslant \varepsilon$,

(ii) $d(w^{\varepsilon}(\cdot),\ \bar{w}(\cdot)) \leqslant \sqrt{\varepsilon}$,

(iii) $J^{\varepsilon}_d(w(\cdot)) = J^{\varepsilon}(w(\cdot)) + \sqrt{\varepsilon}\, d(w^{\varepsilon}(\cdot),\ w(\cdot))$ 在 $w^{\varepsilon}(\cdot)$ 处达到最小值 $J^{\varepsilon}(w^{\varepsilon}(\cdot))$.

可用与经典最优控制问题完全相同的方法，推导公式 (2.1)，$u(\cdot) \in U_{ad}$，$\xi(\cdot) \in L^{\infty}([0,\ 1];\ \boldsymbol{R})$，$\xi(t) \geqslant 0$ 时，$J^{\varepsilon}_d(w(\cdot))$ 达到最小值的最大值原理. 设 $y^{\varepsilon}(\cdot)$ 适合

$$\frac{dy^{\varepsilon}(t)}{dt} = f(y^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)),\quad y^{\varepsilon}(0) = x_0, \tag{3.3}$$

那末存在 $p^{\varepsilon}(\cdot)$ 适合

$$-\frac{dp^{\varepsilon}(t)}{dt} = \frac{\partial H(y^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t), p^{\varepsilon}(t), q^{\varepsilon}(t), r^{\varepsilon}(t))}{\partial x}, \tag{3.4}$$

$$p^{\varepsilon}(1) = \mu^{\varepsilon} \frac{\partial h(y^{\varepsilon}(1))}{\partial x} + \frac{\partial G(y^{\varepsilon}(1))}{\partial x} \nu^{\varepsilon}, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 \left\langle \frac{\partial H(y^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t), p^{\varepsilon}(t), q^{\varepsilon}(t), r^{\varepsilon}(t))}{\partial v},\ v(t) - u^{\varepsilon}(t) \right\rangle dt \tag{3.6}$$

$$\geqslant -\sqrt{\varepsilon}\, |v(\cdot) - u^{\varepsilon}(\cdot)|_{L^{\infty}},\quad \forall v(\cdot) \in U_{ad},$$

$$r^{\varepsilon}(t)(\xi - \xi^{\varepsilon}(t)) \geqslant -\sqrt{\varepsilon}\,(\xi + |\xi^{\varepsilon}(\cdot)|_{L^{\infty}}), \forall \xi \geqslant 0. \tag{3.7}$$

其中

$$q^{\varepsilon}(t) = [J^{\varepsilon}(w^{\varepsilon}(\cdot))]^{-1} g(y^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)),$$

$$r^{\varepsilon}(t) = [J^{\varepsilon}(w^{\varepsilon}(\cdot))]^{-1}(\xi^{\varepsilon}(t) + \varphi(y^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t))),$$

$$\mu^{\varepsilon} = [J^{\varepsilon}(w^{\varepsilon}(\cdot))]^{-1}(h(y^{\varepsilon}(1)) - h(y(1)) + \varepsilon),$$

$$\nu^{\varepsilon} = [J^{\varepsilon}(w^{\varepsilon}(\cdot))]^{-1} G(y^{\varepsilon}(1)).$$

容易验证

$$|\mu^{\varepsilon}|^2 + |\nu^{\varepsilon}|^2 + \int_0^1 |q^{\varepsilon}(t)|^2 dt + \int_0^1 |r^{\varepsilon}(t)|^2 dt = 1.$$

从而存在 $\varepsilon > 0$ 的子列,仍记为 ε,使得当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$\mu^{\varepsilon} \to \mu,\ \nu^{\varepsilon} \to \nu,$$

$q^\varepsilon(\cdot)$ 在 $L^2([0,1];\boldsymbol{R}^m)$ 中弱收敛于 $q(\cdot)$,

$r^\varepsilon(\cdot)$ 在 $L^2([0,1];\boldsymbol{R})$ 中弱收敛于 $r(\cdot)$.

又由于

$$d(w^\varepsilon(\cdot),\ \bar{w}(\cdot)) \to 0,$$

而 $y^\varepsilon(\cdot)$ 适合式(3.3)，所以 $y^\varepsilon(\cdot)$ 在$[0,1]$上一致收敛于 $y(\cdot)$. 由此及式(3.4),(3.5)知，$p^\varepsilon(\cdot)$ 在$[0,1]$上一致收敛于 $p(\cdot)$,且 $p(\cdot)$ 适合式(2.6)和式(2.7).

由式(3.6)取极限推知式(2.8)成立.

由式(3.7)令 $\varepsilon \to 0$ 推知

$$r(t)(\xi - \zeta(t)) \geqslant 0,\ \forall \xi \geqslant 0.$$

因此 $r(t) \geqslant 0$, $r(t) = 0$. 当 $\zeta(t) > 0$ 时,即

$$r(t)\varphi(y(t),u(t)) = 0.$$

它就是式(2.10). 所以，如果 $\mu,\nu,p(\cdot),q(\cdot),r(\cdot)$ 不全为零，则由近似最优控制问题证明了最大值原理,但还需证明 $\mu,\nu,p(\cdot),q(\cdot),r(\cdot)$不全为零.

四、最大值原理的证明

由于 $d(u^\varepsilon(\cdot),u(\cdot)) \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, 所以 $y^\varepsilon(\cdot)$ 一致收敛于 $y(\cdot)$. 而 $u(\cdot) \in L^\infty([0,1];\boldsymbol{R}^k)$,所以存在 $\varepsilon_0 > 0$和 $R_0 > 0$, 使得当 $0<\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 和 $t \in [0,1]$ 时

$$(y^\varepsilon(t),u^\varepsilon(t)) \in B\left(\frac{1}{2}R_0\right).$$

这里 $B(R) = \{(x,v) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^k \mid |x| + |v| \leqslant R\}$.

记

$$D = \left\{(x,v) \in B(R_0) \mid \Phi_v\Phi_v^* \ngeqslant \frac{1}{2}\beta I_{m+1}\right\},$$

$$m = \inf\{|\varphi(x,v)| \mid (x,v) \in D\}.$$

现证

$$m > 0. \tag{4.1}$$

否则,存在 $(x_j,v_j) \in D$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\varphi(x_j,v_j) = 0$. 不妨设 (x_j,v_j) 的收敛子列就是本身，即 $(x_j,v_j) \to (\bar{x},\bar{v})$. 这时

$$\varphi(\bar{x},\bar{v}) = 0,\quad \Phi_v\Phi_v^* \ngeqslant \frac{1}{2}\beta I_{m+1},$$

它与 $\Phi_v\Phi_v^* \geqslant \beta I_{m+1}$ 相矛盾. 所以式(4.1)成立.

为证明最大值原理,现在证明

$$\mu,\nu,p(\cdot),q(\cdot),r(\cdot)\ \text{不同时为零}. \tag{4.2}$$

否则，$p^\varepsilon(\cdot)$ 在 $L^2([0,1]\boldsymbol{R}^k)$ 上强收敛于零. 从而由式(3.6)推知

$$\int_0^1 \langle g_v^*(y(t),u(t))q^\varepsilon(t) + \varphi_v^*(y(t),u(t))r^\varepsilon(t), v(t) - u(t)\rangle dt \geqslant -0(1),$$

$$\forall v(\cdot) \in U_{ad}.$$

由于 U_{ad} 在$L^2([0,1];\boldsymbol{R}^k)$中具有有限余维数,根据 Fattorini 引理,由上式知,在$L^2([0,1];\boldsymbol{R}^k)$ 中

$$g_v^*(y(\cdot),u(\cdot))q^\varepsilon(\cdot)+\varphi_v^*(y(\cdot),u(\cdot))r^\varepsilon(\cdot)\to 0. \tag{4.3}$$

记

$$E_m=\{t\in[0,1]\mid -m<\varphi(y(t),u(t))\leqslant 0\},$$

则由m的定义,当 $t\in E_m$ 时

$$\Phi_v(y(t),\ u(t))\Phi_v^*(y(t),\ u(t))\geqslant\frac{1}{2}\beta I_{m+1}.$$

从而由式(4.3)推知,在 $L^2(E_m;\boldsymbol{R}^{m+1})$ 中

$$(q^\varepsilon(\cdot),r^\varepsilon(\cdot))\to 0. \tag{4.4}$$

而对于 $t\in[0,1]\backslash E_m$,存在 $\varepsilon_1>0$ 使得当 $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ 时

$$-\varphi(y^\varepsilon(t),\ u^\varepsilon(t))\geqslant\frac{1}{2}m,\ \forall t\in[0,1]\backslash E_m.$$

在式(3.7)中取 $\xi=0$ 得到$\left(注意到\ \xi^\varepsilon(t)=-\varphi(y^\varepsilon(t),\ u^\varepsilon(t))\geqslant\frac{1}{2}m\right)$

$$r^\varepsilon(t)\leqslant\frac{2}{m}\sqrt{\varepsilon}\ |\xi^\varepsilon(\cdot)|_{L^\infty},\qquad \forall t\in[0,1]\backslash E_m.$$

若取 $\xi=\xi^\varepsilon(t)+\frac{m}{2}$, 就得到

$$r^\varepsilon(t)\geqslant-\frac{2}{m}\sqrt{\varepsilon}\left(\frac{m}{2}+2|\xi^\varepsilon(\cdot)|_{L^\infty}\right),\ \forall t\in[0,1]\backslash E_m.$$

即 $\|r^\varepsilon(\cdot)\|$ 在 $L^\infty([0,1]\backslash E_m;\boldsymbol{R})$ 上收敛于零. 再由式(4.3)知

$$q^\varepsilon(t)=-(g_vg_v^*)^{-1}g_v\varphi_v^*r^\varepsilon(t)+0(1).$$

从而知 $q^\varepsilon(\cdot)$ 在 $L^2([0,1]\backslash E_m;\boldsymbol{R}^m)$ 中收敛于零. 由此及(4.4)得在 $L^2([0,1];\boldsymbol{R}^{m+1})$ 上

$$(q^\varepsilon(\cdot),r^\varepsilon(\cdot))\to 0$$

矛盾. 因此,式(4.1)成立.

参 考 文 献

[1] 庞特里雅金等,最佳过程的数学理论,上海科技出版社.(1965),1—106.

[2] Cheng Z. L., Hong H. M. and Zhang J. F., The Optimal State Regulation of Generalized Dynamical Systems with Quadratic Cost Functional, Proc. of the 10th World Congress of IFAC, 1987.

[3] Urzzula, Lodzewicz-kowalewska, The Extremum Principle for Problems of Optimal Control with Mixed Constrains, *Acta Universitaties Looziensis Folia Math.*, 2(1987).

[4] Ekeland, I., Nonconvex Minimization Problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, (NS) 1 (1979), 443—474.

[5] Fattorini, H. O., A Unified Theory of Necessary Conditions for Nonconvex Control Systems, *Appl. Math. & Optim.*, 15 (1987), 141—185.

MAXIMUM PRINCIPLE FOR OPTIMAL CONTROL OF NONLINEAR GENERALIZED SYSTEMS —A FINITE DIMENSIONAL CASE

LI XUNJING
(*Department of Mathematics, Fudan University*)
PENG SHIGE
(*Institute of Mathematics, Fudan University*)

ABSTRACT

A Maximum principle for optimal control of nonlinear generalized systems was derived by using Ekeland's variational principle and Fattorini's lemma.

Key words: Generaized system; optimal control; maximum principle; Ekeland's variational principle.