

# 具有预期闭环极点区域的稳定控制器的 $H^\infty$ 优化设计方法

范 玉 顺      吴 麒

(清华大学自动化系)

王 恩 平

(中国科学院系统科学研究所)

## 摘 要

本文从工程应用角度出发,提出了一种将闭环极点设置于预期稳定区域的稳定控制器的  $H^\infty$  优化设计方法,即实参数优化求解控制器的方法。这种方法综合考虑了闭环动态性能、抗干扰、鲁棒性以及控制器本身的稳定性。实例表明,与现有的  $H^\infty$  设计方法相比,用本文方法设计的控制系统在不显著增大抗干扰和鲁棒性指标情况下,具有闭环动态性能良好及控制器稳定等优点,因此具有工程应用价值。

**关键词:** 闭环极点区域,稳定控制器,  $H^\infty$  优化设计。

## 一、引 言

八十年代以来,控制理论领域中一个新的研究方向—— $H^\infty$  优化设计方法已经形成,并取得了许多研究成果。其设计思路是把抗干扰和提高鲁棒性的问题归结为求解一个保证闭环系统稳定,且使相应的加权灵敏度函数或加权补灵敏度函数的  $H^\infty$  范数指标达到最优的输出反馈控制器。其设计方法是利用参数化的方法求得使闭环系统稳定的控制器的参数化公式,从而把问题化为关于  $H^\infty$  空间的模型匹配或插值问题。通过求解插值问题或模型匹配问题得到参数后,逆推而得到控制器。用这种方法设计出的控制器可以有效地衰减属于一个集合的干扰或提高系统的鲁棒性。目前这种设计方法正受到越来越多的学者们的重视,并被部分学者认为是现有的解决鲁棒性问题的最完善的方法。

按现有的  $H^\infty$  设计方法所设计的控制器,由于在设计过程中未考虑闭环动态品质的要求,从而系统未必具有良好的闭环动态性能。其次,控制器本身可能是不稳定的。

为解决控制器不稳定的问题,文献[1]提出了一种变换插值方法。这种方法首先利用对数变换把  $s$  域中的问题变换到  $z$  域中,在  $z$  域中利用插值方法求得使加权灵敏度函数指标极小的稳定控制器后,再反变换到  $s$  域。由于采用的是对数变换,所以反变换后得到

的控制器为无理控制器, 需要采用有理近似的方法才能得到最终的控制器。这样做不仅增加了问题的复杂性, 而且控制器的有理近似所造成的误差将导致加权灵敏度指标的上升。

本文从一般预期稳定区域上互质分式化入手, 提出一种使闭环极点位于预期稳定区域内的稳定控制器的  $H^\infty$  优化设计方法, 并将问题进一步化为有约束的实参数寻优问题求解。

## 二、问题的提出及简化

### 1. 问题的提出

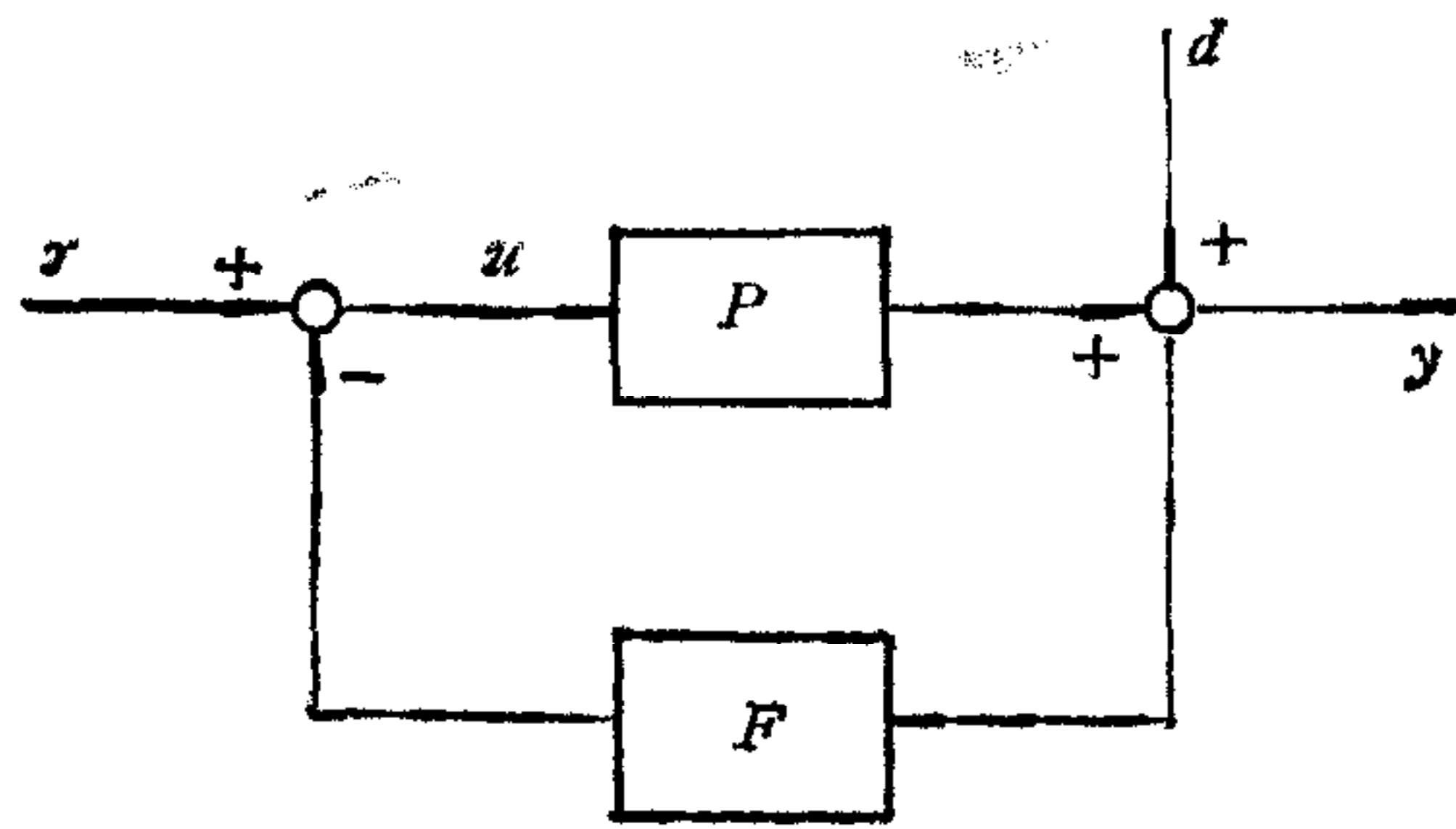


图 1 单输入单输出线性系统

考虑图 1 所示的单输入单输出线性系统。图中  $P$  为控制对象传递函数;  $F$  为控制器传递函数;  $y$  为系统输出;  $r$  为外加参考输入;  $d$  为属于某一信号集的输出干扰

$$d \triangleq W \cdot v. \quad (2.1)$$

$W, W^{-1} \in \mathbf{RH}^\infty$ ,  $v$  为满足如下条件的信号集:

$$\|v\|_2 \leq 1, \quad (2.2)$$

$$\|v\|_2 \triangleq \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v'(-j\omega) \cdot v(j\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

定义  $S = (1 + PF)^{-1}$  为系统灵敏度函数。当反馈控制器  $F$  的设计满足闭环系统稳定, 且使指标函数

$$J = \|WS\|_\infty \quad (2.4)$$

极小时, 闭环系统对由(2.1)式所描述的一类干扰实现有效的衰减<sup>[2]</sup>。

在实际工程中, 不仅要求对干扰有效衰减, 还要求闭环系统具有良好的动态品质, 要求控制器稳定。由于闭环极点在很大程度上决定了闭环动态品质, 所以将闭环极点设置在预期的稳定区域上是保证闭环系统具有良好的动态品质的一种有效方法。考虑上述要求, 设计的控制器  $F$  必须满足如下条件:

- 1) 闭环极点位于预期稳定区域内;
- 2) 控制器  $F$  是稳定的;
- 3) 指标函数(2.4)达到最小。

### 2. 具有预期闭环极点区域的控制器的参数化公式

对于连续线性系统,我们考虑比左半平面更一般的稳定区域  $D$ ,  $D$  满足如下两个条件:

- 1)  $D$  为左半平面中的开凸集;
- 2)  $D$  关于实轴对称.

**定义 2.1.**  $\mathbf{RH}_D^\infty$  为所有极点位于区域  $D$  内的稳定真的有理函数组成的集合.

**引理 2.1.**  $\mathbf{RH}_D^\infty$  为主理想整环.

证明. 类似文献[3]中第二章定理 2.4 和附录 A.4 性质 6 的证明,兹略.

**定义 2.2.**  $f, g \in \mathbf{RH}_D^\infty$  互质为  $f, g$  在  $D$  的补区域  $D^c$  内无公共零点(包括无穷零点).

**引理 2.2.**<sup>[3]</sup> 设  $R$  为主理想整环,则  $x, y \in R$  互质当且仅当存在  $p, q \in R$  满足  $px + qy = 1$ .

作对象  $P$  在  $\mathbf{RH}_D^\infty$  上的互质分式化

$$P = n_p \cdot d_p^{-1}, \quad (2.5)$$

其中  $n_p, d_p \in \mathbf{RH}_D^\infty$ , 互质. 解下述方程可得到一组  $g, h \in \mathbf{RH}_D^\infty$ ,

$$gd_p + hn_p = 1. \quad (2.6)$$

**定理 2.3.** 给定对象  $P = n_p \cdot d_p^{-1}$ , 其中  $n_p, d_p \in \mathbf{RH}_D^\infty$ , 互质. 则使闭环极点位于预期稳定区域  $D$  的控制器  $F$  的集合  $S_D(P)$  由下式给出:

$$S_D(P) = \{F = (h + Rd_p)(g - Rn_p)^{-1} \mid R \in \mathbf{RH}_D^\infty, g - Rn_p \neq 0\}, \quad (2.7)$$

其中  $g, h \in \mathbf{RH}_D^\infty$  满足(2.6)式,  $R$  为参数.

证明. 类似文献[3]中第三章定理 1.13 的证明,兹略.

由式(2.5)及(2.7),指标(2.4)化为

$$J = \|Wd_p(g - Rn_p)\|_\infty. \quad (2.8)$$

### 3. 稳定控制器

由式(2.7)可以看出,  $F$  稳定当且仅当  $(g - Rn_p)$  在开右半平面无任何零点,即  $(g - Rn_p)^{-1} \in \mathbf{RH}^\infty$ . 问题在于是否存在参数  $R \in \mathbf{RH}_D^\infty$ , 使  $(g - Rn_p)^{-1} \in \mathbf{RH}^\infty$ .

**定义 2.3.** 对于对象  $P$ , 如果存在一个稳定的输出反馈控制器, 使闭环极点位于预期稳定区域  $D$  内, 则对象  $P$  称为  $D$  强可镇定的.

当  $D$  为左半平面时, 则  $P$  为  $D$  强可镇定化为  $P$  强可镇定<sup>[3]</sup>.

**引理 2.4**<sup>[3]</sup>. 给定对象  $P = n_p \cdot d_p^{-1}$ , 其中  $n_p, d_p \in \mathbf{RH}_D^\infty$ , 互质. 则  $P$  为强可镇定的, 当且仅当  $d_p(\cdot)$  在  $n_p$  的位于  $C_{+e}$  的所有互异实零点处的值具有相同符号.

$C_{+e}$  代表右半平面加上无穷远点.

**定理 2.5.** 给定  $P = n_p \cdot d_p^{-1}$ , 其中  $n_p, d_p \in \mathbf{RH}_D^\infty$ , 互质. 则  $P$  为  $D$  强可镇定的, 如果  $d_p(\cdot)$  在  $n_p$  的位于  $D^c$  的所有互异实零点处的值同号.

证明. 类似引理 2.4 的证明. 唯一的区别是在构造插值函数时, 其极点必须选在区域  $D$  内. 兹略.

由定理 2.3 及定理 2.5 可知, 当  $P$  为  $D$  强可镇定时, 必存在稳定控制器  $F$  使闭环极点位于区域  $D$  内, 从而必存在参数  $R \in \mathbf{RH}_D^\infty$ , 使  $(g - Rn_p)^{-1} \in \mathbf{RH}^\infty$ . 因此设计使闭环极点位于区域  $D$  内且极小化指标(2.8)的稳定控制器的问题就化为求  $\mathbf{RH}_D^\infty$  空间中参数  $R$ , 满足  $(g - Rn_p)^{-1} \in \mathbf{RH}^\infty$ , 且使指标(2.8)达到极小. 但是由于预期稳定区域具有很大

的任意性,加之  $(g - Rn_p)$  在  $C_{+c}$  无零点这一约束难于解析表达,所以很难找到一种求解  $R$  的解析方法. 因此下面将求解参数  $R$  的问题化为对实参数寻优来解决.

### 三、实参数寻优方法求解参数 $R$

$\mathbf{RH}_D^\infty$  空间中阶数为  $t$  的参数  $R$  可表示成

$$R = \frac{b_0 s^t + b_1 s^{t-1} + \cdots + b_t}{s^t + a_1 s^{t-1} + \cdots + a_t}, \quad (3.1)$$

其中  $b_0, a_i, b_i (i = 1, \cdots, t)$  为实数,且下述代数方程的根均位于区域  $D$  内

$$s^t + a_1 s^{t-1} + \cdots + a_t = 0. \quad (3.2)$$

因此判断形如(3.1)的有理函数  $R$  是否属于  $\mathbf{RH}_D^\infty$  空间可以通过判别代数方程(3.2)的根是否属于  $D$  来确定. 而给定  $g, n_p, R \in \mathbf{RH}_D^\infty$ , 判断  $(g - Rn_p)$  在开右半面有无零点也可以通过判断一个形如式(3.2)的  $(g - Rn_p)$  的分子多项式代数方程的根是否位于  $C_{+c}$  来确定.

因此假设在未知参数  $R$  的阶次已知的情况下,可利用求代数方程根的方法判断所选参数  $b_0, a_i, b_i$  是否满足  $R \in \mathbf{RH}_D^\infty, (g - Rn_p)^{-1} \in \mathbf{RH}^\infty$  的条件. 通过对满足条件的实参数  $b_0, a_i, b_i$  寻优可找到使指标(2.8)达到极小的参数  $R$ .

在实际设计中,  $R$  的次数为未知. 所以  $R$  的阶次  $t$  也应作为一个寻优变量. 对  $t, b_0, a_i, b_i$  寻优求得参数  $R$  后,再利用(2.7)式求得控制器.

综上所述得控制器的设计步骤如下:

- 1) 根据实际系统对动态品质的要求确定预期稳定区域  $D$ .
- 2) 作  $P$  在  $\mathbf{RH}_D^\infty$  上的互质分式化,  $P = n_p \cdot d_p^{-1}$ .
- 3) 检验对象  $P$  是否  $D$  强可镇定. 如不是, 则修改预期稳定区域  $D$ ; 若  $P$  不是强可镇定的, 则满足要求的稳定控制器不存在.
- 4) 解方程(2.6)得一组解  $g, h \in \mathbf{RH}_D^\infty$ .
- 5) 对  $R$  利用实参数优化方法求得其阶次  $t$  及参数  $b_0, a_i, b_i, i = 1, \cdots, t$ .
- 6) 将  $R$  代入式(2.7)得控制器  $F$ .

### 四、举 例

例 1. 给定对象

$$P(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+3)(s+4)}, \quad (4.1)$$

加权函数

$$W(s) = \frac{s+1}{10s+1}. \quad (4.2)$$

a) 按照常规的  $H^\infty$  设计方法得控制器为

$$F(s) = \frac{-12.397(s^2 + 3.901s + 0.282)}{(s^2 - 2.554s - 3.554)}. \quad (4.3)$$

$$J_{\min}^* = 0.413. \quad (4.4)$$

控制器  $F$  不稳定。闭环系统极点位于  $-0.1, -3, -3.554$ 。其中极点  $-0.1$  距虚轴很近,因而影响系统性能。

b) 设预期稳定区域  $D$  为

$$D = \{s | \operatorname{Re}(s) < -0.8, |\operatorname{Im}(s)| < 0.5|\operatorname{Re}(s)|\}. \quad (4.5)$$

按照本文所述设计方法得结果如下:

$$d_p(s) = \frac{s - 0.1}{s + 1}, \quad n_p(s) = \frac{(s - 1)^2}{(s + 1)(s + 3)},$$

$$h(s) = 4.21, \quad g(s) = \frac{-3.21s - 12.1}{s + 3},$$

$$R(s) = \frac{-3.3s - 3.292}{s + 1.703}, \quad (4.6)$$

$$F(s) = \frac{10.11(s^3 + 30.02s^2 + 49s + 20.02)}{(s^3 + 1.29s^2 + 266.18s + 265.53)}, \quad (4.7)$$

$$J_{\min} = 0.4675. \quad (4.8)$$

控制器  $F$  稳定。  $J_{\min}$  比  $J_{\min}^*$  上升 13%。闭环系统极点位于  $-1, -1.703, -3$ 。

**例 2<sup>[1]</sup>**。给定对象

$$P(s) = \frac{(s - 1)(s - 2)}{(s + 3)(s + 4)}, \quad (4.9)$$

加权函数

$$W(s) = \frac{s + 10}{100s + 10}. \quad (4.10)$$

a) 按常规  $H^\infty$  设计方法得控制器  $F$  为

$$F(s) = \frac{-1.061(s + 3)(s + 4)}{(s - 4.1487)(s + 0.1)}. \quad (4.11)$$

$$J_{\min}^* = 0.1635. \quad (4.12)$$

控制器  $F$  不稳定。闭环极点位于  $-3, -3.81, -4, -10.94$ 。

b) 文献[1]给出的设计结果为

$$F(s) = \frac{1.4937(s + 1.2049)}{(s + 0.0922)}, \quad (4.13)$$

$$J_{\min}^{**} = 0.2424. \quad (4.14)$$

控制器  $F$  稳定。  $J_{\min}^{**}$  比  $J_{\min}^*$  上升 48%。闭环极点位于  $-0.549, -0.6097 \pm j1.7496$ 。这些闭环极点距虚轴较近,影响系统性能。

c) 设预期稳定区域  $D$  为

$$D = \{s | \operatorname{Re}(s) < -2, |\operatorname{Im}(s)| < |\operatorname{Re}(s)|\}. \quad (4.15)$$

按照本文所述设计方法得如下结果:

$$d_p(s) = 1, \quad n_p(s) = \frac{(s - 1)(s - 2)}{(s + 3)(s + 4)},$$

$$h(s) = 1, \quad g(s) = \frac{10(s + 1)}{(s + 3)(s + 4)},$$

$$R(s) = \frac{-0.05s + 8.75}{s + 2.305}, \quad (4.16)$$

$$F(s) = \frac{19(s^3 + 18.63s^2 + 93.457s + 139.642)}{(s^3 + 22s^2 + 1188s + 111)}, \quad (4.17)$$

$$J_{\min} = 0.2081. \quad (4.18)$$

控制器  $F$  稳定。  $J_{\min}$  较之  $J_{\min}^*$  上升 27%,  $J_{\min}$  较之  $J_{\min}^{**}$  下降 14%。 闭环极点位于  $-2.305, -3, -4$ 。

## 五、结 论

由以上设计结果可以看出, 本文所述设计方法比现有的  $H^\infty$  设计方法具有动态性能优良, 控制器稳定等优点, 便于工程应用。 在衰减干扰能力方面虽略有下降, 但反映干扰衰减能力的指标上升却不多。 因此, 从实际应用角度来看, 本文所述设计方法有较大应用价值。

本文虽仅就  $H^\infty$  范数指标为加权灵敏度函数, 即抗干扰情况作了研究, 然而对于鲁棒性和综合指标设计问题也同样适用。 唯一需要修改的就是将指标函数改变成设计目的所要求的相应形式, 也即将参数寻优程序中的目标函数作相应改变<sup>[4,5]</sup>。

对于现有  $H^\infty$  设计方法中往往出现的控制器阶次过高的情况, 也可以用本文所提出的方法改善。 因为控制器阶数过高是由参数  $R$  的阶次过高引起, 所以在利用本文所给出的寻优方法求解参数  $R$  时, 可对  $R$  的阶次加以限制, 使控制器阶次不致过高。 这样做会引起指标函数增大, 因此应当在各项要求之间作折衷, 这正是要求设计者运用其知识和经验灵活处理的。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Ganesh, C., Pearson, J. B., Design of Optimal Control Systems With Stable Feedback, Proceedings of American Control Conf., 1986, 1969—1973.
- [ 2 ] Francis B. A., Zames G., On  $H^\infty$ -Optimal Sensitivity Theory for SISO Feedback Systems, *IEEE Trans.*, AC-29 (1984), 9—16.
- [ 3 ] Vidyasagar, M., Control System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press, Cambridge, MA, 1985.
- [ 4 ] Kwakernaak H., A Polynomial Approach to Minimax Frequency Domain Optimization of Multivariable Feedback Systems, *Int. J. C.*, 44(1986), 117—156.
- [ 5 ] Francis B. A., Doyle J. C., Linear Control Theory With an  $H^\infty$  Optimality Criterion, *SIAM J. Control and Optimization*, 25(1987), 815—844.

## A $H^\infty$ OPTIMAL DESIGN OF STABLE CONTROLLER ENSURING ASSIGNED REGION OF CLOSED-LOOP POLES

FAN YUSHUN    WU QI

*(Automation Department, Tsinghua University)*

WANG ENPING

*(Institute of System Science, Academia Sinica)*

### ABSTRACT

In this paper, an  $H^\infty$  optimal design method of stable controllers ensuring assigned region of closed-loop poles is presented. A method of obtaining controllers is described using real parameter optimization. The method fulfils engineering requirements on closed-loop behaviour, disturbance rejection and robustness as a whole. It is worth to mention that the method always gives a stable controller. This is important from the engineering point of view. Numerical examples show that a controller designed by the proposed method has good closed-loop behaviour, and that the disturbance rejection and robustness properties are not very much worse than that of any controller designed by the existing  $H^\infty$  methods. Hence this method is applicable to practical problems.

**Key words:** Closed-loop region; stable controller;  $H^\infty$  optimal design.