第 17 卷 第 1 期 自动化学报 Vol. 17, No. 1
1991 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1991

脉冲固定模式的代数特征[1)]

张庆灵 谢绪恺
(东北工学院数学系,沈阳)

摘 要

本文对广义分散控制系统具有脉冲固定模式的代数特征作了进一步研究,给出了系统存在脉冲固定模式的若干新判据,并讨论了脉冲固定模式的个数.

关键词: 广义系统,固定模式,脉冲模式.

在分散控制理论中,脉冲固定模式这一重要概念已分别由 Chang[1] 和王恩平[2]等人研究过,并给出了各自的判据及算法. 本文将利用零化矩阵理论对脉冲固定模式作进一步研究.

一、准备知识

考虑如下的正则广义开环系统:

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量, $E \in R^{n\times n}$, $A \in R^{n\times n}$, E 不满秩. 用 S_E 表示 E 的最大右零化矩阵,即 $ES_E = 0$, 且

$$\operatorname{rank} E + \operatorname{rank} S_E = n. \tag{2}$$

类似地,用 T_E 表示 E 的最大左零化矩阵.

引理 1. 系统 (2.1) 具有脉冲模式(无穷零点[3])的充要条件是

$$\operatorname{rank}[E \ \ AS_E] < n\left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E \\ T_E A\end{bmatrix} < n\right). \tag{3}$$

证明. 只需证其条件之一,另一个类似可证.

必要性. 由假设,存在非零向量 $\boldsymbol{w}$ 和某向量 $\boldsymbol{v}$ 使[3]

$$\boldsymbol{w}[sE - A] = \boldsymbol{v}E. \tag{4}$$

对所有复数 s 成立. 从而, $\boldsymbol{w}E = 0$, $-\boldsymbol{w}A = \boldsymbol{v}E$. 于是

$$\boldsymbol{w}[E \ \ AS_E] = 0. \tag{5}$$

即 (3) 式成立.

本文于 1989 年 6 月 12 日收到.
1) 国家自然科学基金资助课题.

充分性. 由式 (3) 直接得式 (5). 由 S_E 的定义知, $\boldsymbol{w}A$ 可由 E 的行线性表示, 即 $\boldsymbol{w}A=-\boldsymbol{v}E$. 从而结论得证.

记 $p\triangleq\operatorname{rank}T_E(=\operatorname{rank}S_E)$, 由引理 1 可证

推论 1. 系统 (1) 具有脉冲模式的充要条件是

$$\operatorname{rank}[T_E A S_E]<p. \tag{6}$$

记 $r\triangleq\operatorname{rank}[E\ \ AS_E]$. 有

引理 2. 系统 (1) 所具有的脉冲模式组数(独立的脉冲模式组数,以下同)为 $n-r$.

证明. 由于系统的无穷零点在受限等价变换下保持不变,不失一般性,设有可逆阵 P 和 Q 使

$$P[sE-A]Q=\operatorname{blockdiag}[sI_0-A_1 sJ_1-I_1\cdots sJ_t-I_t I], \tag{7}$$

其中

$$J_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{p_i\times p_i}, \quad i=1,2,\cdots,t.$$

这时,易知 $Q^{-1}S_E$ 具有如下形式:

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & & & 0 & \\ \hline & e_1 & & & \\ 0 & & e_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e_r \\ & & & & & I \end{array}\right],$$

其中 e_i 为 p_i 维单位向量,只有第一行元素非零, $i=1,2,\cdots,t$. 将这些标准形式代入 $[E\ \ AS_E]$, 则可以得到脉冲模式组数为 $n-r$.

由推论 1 和引理 2, 还可以证明

推论 2. 系统 (1) 所具有的脉冲模式个数为 $p-q$. 这里 $q=\operatorname{rank}[T_E A S_E]$.

二、主要结果

考虑如下的广义分散控制系统:

$$E\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{N}B_i\boldsymbol{u}_i, \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{y}_i=C_i\boldsymbol{x},\ i=1,2,\cdots,N, \tag{8b}$$

其中 $B_i\in R^{n\times m_i}$, $C_i\in R^{l_i\times n}$, $i=1,2,\cdots,N$, $\boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{y}_i$ 分别为具有相应维数的第 i 个通道的输入向量和输出向量,其它假设同前. 简记系统 (8) 为 (E,A,B,C). 局部输出反馈为

$$\boldsymbol{u}_i=K_i\boldsymbol{y}_i,\ i=1,2,\cdots,N, \tag{9}$$

其中 $K_i \in R^{m_i \times l_i}$，记 $K = \text{block diag}[K_1, K_2, \cdots, K_N]$.

定义 1. 如果所有正则系统 $(E, A + BKC)$ 具有(公共)脉冲模式，则称系统 (8) 具有脉冲固定模式.

定理 1. 设 $M \in R^{n \times n}$ 为实参数矩阵，则对所有固定 m 所得到的正则系统 (E, M) 具有(公共)脉冲模式的充要条件是

$$\underset{M}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{r}}[EMS_E] < n \left(\underset{M}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{r}}\begin{bmatrix} E \\ T_E M \end{bmatrix} < n\right). \tag{10}$$

证明．由引理 1 可证，详细推导从略.

定理 2. 系统 (8) 具有脉冲固定模式的充要条件是，对于 $\{1, 2, \cdots, N\}$ 的某个不相交分划 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 和 $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_N\}$ 有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & AS_E & B_{i_1} & B_{i_2} \cdots B_{i_k} \\ 0 & C_{i_{k+1}}S_E & 0 & 0 \quad\; 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad\; \vdots \\ 0 & C_{i_N}S_E & 0 & 0 \quad\; 0 \end{bmatrix} < n. \tag{11}$$

证明．由定义 1 及定理 1 知，系统 (8) 具有脉冲固定模式的充要条件是

$$\underset{K}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{r}}\{E \;\; [A + BKC]S_E\} < n. \tag{12}$$

再由类似于文 [4] 中证明定理 1 的方法可推得 (11) 式与 (12) 式等价．则结论得证．同理可证如下结果：

定理 3. 系统 (8) 具有脉冲固定模式的充要条件是，对于 $\{1, 2, \cdots, N\}$ 的某个不相交分划 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 和 $\{i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots, i_N\}$ 有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \cdots 0 \\ T_E A & T_E B_{i_1} & T_E B_{i_2} \cdots T_E B_{i_k} \\ C_{i_{k+1}} & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \quad\;\; \vdots \\ C_{i_N} & 0 & 0 \cdots 0 \end{bmatrix} < n. \tag{13}$$

定理 4. 系统(8)具有脉冲固定模式的充要条件是正常分散控制系统$(T_E AS_E, T_E B, CS_E)$ 存在零固定模式.

证明．由推论 1 及 (6) 式可知，系统 (8) 具有脉冲固定模式的充要条件是

$$\underset{K}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{r}}\{T_E[A + BKC]S_E\} < p, \tag{14}$$

即等价于

$$\underset{K}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{r}}\{[T_E AS_E - s_0 I] + T_E BKCS_E\}|_{s_0=0} < p. \tag{15}$$

这就是说，正常分散控制系统 $(T_E AS_E, T_E B, CS_E)$ 具有零固定模式．结论得证.

当 (E, A, B, C) 分解成(受限等价于)形式为

$$\left(\begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, [C_1 C_2]\right)$$

时，$S_E = \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix}$，$T_E = [0 \;\; I_r]$．由定理 4 可得

推论 3[1]. 系统 (8) 具有脉冲固定模式的充要条件是 (A_{22}, B_2, C_2) 具有零固定模式.

记 $d \triangleq \underset{K}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{r}}\{E[A+BKC]S_E\}$, $h \triangleq \underset{K}{\mathrm{g}\cdot\mathrm{r}}\{T_E[A+BKC]S_E\}$.

定理 5. 系统 (8) 所具有的脉冲固定模式个数为 $n-d$.

证明. 由引理 2 可得,推导从略.

类似的,由推论 2 可以得到

推论 4. 系统 (8) 所具有的脉冲固定模式个数为 $p-h$.

有关脉冲固定模式的重数问题将有另文专述.

参 考 文 献

[1] Chang, T. N. and Davison, E. J., Decentralized Control for Descriptor Type Systems, Proc. of the 25th CDC, **2**(1986), 1176.

[2] 王朝珠、王恩平,奇异分散控制系统的无穷固定模,系统科学与数学, **8**(1988), No. 4, 142.

[3] Verghese, G. C, Levy, B. C. and Kailth, T., A Generalized State-space for Singular Systems, *IEEE Trans Auto. Control*, **AC-26**(1981), 811—831.

[4] 谢绪恺、荆海英,分散控制系统的固定模式,自动化学报, **12**(1986), No. 2, 165.

ALGEBRAICAL CHARACTERIZATIONS OF IMPULSIVE DECENTRALIZED FIXED MODES

ZHANG QINGLING XIE XUKAI

(Northeast University of Technology)

ABSTRACT

In this paper, the algebraical characterizations of the existence of impulsive decentralized fixed modes in descriptor systems are studied. Some new necessary and sufficient conditions for the system to have impulsive decentralizedfixed modes are obtained. In the meantime, the number of the impulsive decentralized fixed modes are obtained. In the meantime, the number of the impulsive decentralized fixed modes is also given.

Key words: Descriptor systems; fixed mode; impulsive mode.