第 17 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 1
1991 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1991

时变线性系统最优控制的 Walsh 级数分析法

杨成梧　胡健生
(华东工学院自动化系，南京)

摘　要

本文应用 Walsh 级数把最优控制问题转化成了一般代数极值问题，算法简洁明了，适合计算机求解，并解决了以前用 Walsh 级数分析时一直难以处理的末端条件问题[1]，同时给出了计算实例，结果令人满意.

关键词：最优控制，Walsh 级数.

一、引　言

Walsh 函数是一类与三角函数极为相似的，且具有幅值为 +1 和 −1 的二值正交函数. 1975 年 Chen 和 Hsiao 把 Walsh 级数用于最优控制，但在求解 Riccati 方程过程中遇到了末端条件处理的复杂问题[1,3]，为了简化时变线性系统最优控制问题的处理，本文给出一种新的简便分析法. 利用 Walsh 函数的正交特性将最优性能泛函直接转化成一般代数问题的求解，从而避免了求解 Riccati 方程时末端条件转换所带来的不便.

二、Walsh 级数的运算特性

任意函数 $f(t)\in l^2[0,1)$ 总可以近似展开成 $m(m=2^d$, d 是自然数) 阶 Walsh 级数.

$$f(t)\approx\sum_{i=0}^{m-1}f_i\phi_i(t)=F^T\Phi(t), \tag{1}$$

$$F=[f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}]^T,\ f_i=\langle f(t),\ \phi_i(t)\rangle, \tag{2}$$

$$\Phi(t)=[\phi_0(t),\phi_1(t)\cdots,\phi_{m-1}(t)]. \tag{3}$$

Walsh 级数的积分特性由下面关系式给出[1]:

$$\int_0^t\Phi(t)dt=P\Phi(t),\ t\in[0,1) \tag{4}$$

本文于 1988 年 7 月 4 日收到.

积分矩阵 P 是一个 $m \times m$ 维非奇异常数矩阵. Walsh 级数的乘法特性是分析时变系统的重要工具.

$$\Phi(t)\Phi^T(t)C_m = C_{m\times m}\Phi(t), \tag{5}$$

$$C_m = [c_0, c_1, \cdots, c_{m-1}], \tag{6}$$

$$C_{m\times m} = \begin{bmatrix} C_{\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}} & C_{+\frac{m}{2}(\frac{m}{2}\times\frac{m}{2})} \\ C_{+\frac{m}{2}(\frac{m}{2}\times\frac{m}{2})} & C_{\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

子矩阵 $C_{+\frac{m}{2}(\frac{m}{2}\times\frac{m}{2})}$ 表示子矩阵 $C_{\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}}$ 的每个元素下标增加 $\frac{m}{2}$.

三、时变线性系统最优控制分析

考虑由如下状态方程描述的时变线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t), \ t \in [0, T), \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0. \end{cases} \tag{8}$$

$\boldsymbol{x}(t)$ 是 n 维状态向量, $\boldsymbol{u}(t)$ 是 r 维控制向量, $A(t)$ 是 $n \times n$ 维时变系数矩阵, $B(t)$ 是 $n \times r$ 维时变系数矩阵,性能指标为

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T [\boldsymbol{x}^T(t)Q\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)R\boldsymbol{u}(t)]dt. \tag{9}$$

其中 Q 是 $n \times n$ 维半正定矩阵; R 是 $r \times r$ 维正定矩阵. 令 $\tau = t/T$, 以 τ 为自变量, 则 (18) 式可改写成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = T[A(\tau)\boldsymbol{x}(\tau) + B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)], \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0. \end{cases} \tag{10}$$

式中

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\tau) = d\boldsymbol{x}(T\tau)/d\tau.$$

将 $\boldsymbol{x}(\tau)$ 和 $\boldsymbol{u}(\tau)$ 展开成 Walsh 级数[2]

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i\phi_i(\tau) = \hat{\Phi}_n^T(\tau)G, \ G = [g_0^T, g_1^T, \cdots, g_{m-1}^T]^T_{nm\times 1}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \sum_{i=0}^{m-1} g_{i0}\phi_i(\tau) = \hat{\Phi}_n^T(\tau)G_0, \ G_0 = [x_0^T, 0, \cdots, 0]_{nm\times 1}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} h_i\phi_i(\tau) = \hat{\Phi}_r^T(\tau)H, \ H = [h_0^T, h_1^T, \cdots, h_{m-1}^T]_{rm\times 1}, \tag{13}$$

$$\hat{\Phi}_i(\tau) = [\Phi(\tau)\otimes I_i]_{im\times i}, \ i = n, r. \tag{14}$$

$\otimes$表示 Kronecker 乘积, I_i 是 i 阶单位矩阵. $A(\tau)$ 和 $B(\tau)$ 的 Walsh 级数展开式为

$$A(\tau) = [A_0, A_1, \cdots, A_{m-1}]_{n\times nm}\hat{\Phi}_n(\tau) \triangleq \hat{A}^T\hat{\Phi}_n(\tau), \tag{15}$$

$$B(\tau) = [B_0, B_1, \cdots, B_{m-1}]_{n\times rm}\hat{\Phi}_r(\tau) \triangleq \hat{B}^T\hat{\Phi}_r(\tau). \tag{16}$$

此时可得

$$A(\tau)\boldsymbol{x}(\tau)=\hat{A}^T\hat{\Phi}_n(\tau)\hat{\Phi}_n^T(\tau)G=\hat{\Phi}_n^T(\tau)\tilde{A}G, \tag{17}$$

$$B(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)=\hat{B}^T\hat{\Phi}_r(\tau)\hat{\Phi}_r^T H=\hat{\Phi}_n^T(\tau)\tilde{B}H. \tag{18}$$

式中 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 由前面介绍的 Walsh 级数乘法特性所得，结构为

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \\ A_1 & A_0 & \cdots & A_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m-1} & A_{m-2} & \cdots & A_0 \end{bmatrix}_{nm\times nm}; \quad \tilde{B}=\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \cdots & B_{m-1} \\ B_1 & B_0 & \cdots & B_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m-1} & B_{m-2} & \cdots & B_0 \end{bmatrix}_{nm\times rm}. \tag{19}$$

把各项 Walsh 级数展开式代入 (10) 式，并对 τ 积分

$$\begin{cases}\hat{\Phi}_n^T(\tau)G-\hat{\Phi}_n^T(\tau)G_0=T[\hat{\Phi}_n^T(\tau)\hat{P}^T\tilde{A}G+\hat{\Phi}_n^T(\tau)\hat{P}^T\tilde{B}H], \\ \hat{P}=P\otimes I_n. \end{cases} \tag{20}$$

由 Walsh 函数的正交特性两边消去 $\hat{\Phi}_n^T(\tau)$ 并化简得

$$G=CH+D. \tag{21}$$

其中

$$\begin{cases} D\triangleq[I-T\hat{P}^T\tilde{A}]^{-1}G_0, \\ C\triangleq T[I-T\hat{P}^T\tilde{A}]^{-1}\hat{P}^T\tilde{B}. \end{cases} \tag{22}$$

此式非常简洁地沟通了状态和控制之间的关系.

性能泛函的转换. 把各项 Walsh 级数展开式代入 (9) 式

$$\begin{aligned} J&=\frac{1}{2}\int_0^T[\boldsymbol{x}^T(t)Q\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^T(t)R\boldsymbol{u}(t)]dt \\ &=\frac{T}{2}\int_0^1[G^T\hat{\Phi}_n(\tau)Q\hat{\Phi}_n^T(\tau)G+H^T\hat{\Phi}_r(\tau)R\hat{\Phi}_r(\tau)H]d\tau \\ &=\frac{T}{2}[G^T\tilde{Q}G+H^T\tilde{R}H]. \end{aligned} \tag{23}$$

式中 $\tilde{Q}=I_m\otimes Q$，$\tilde{R}=I_m\otimes R$，这样最优控制问题就转化成了如下代数问题：

$$\begin{cases} G=CH+D, \\ J=\dfrac{T}{2}[G^T\tilde{Q}G+H^T\tilde{R}H]. \end{cases} \tag{24}$$

由代数式求极值的必要条件. 令

$$\left.\frac{\partial J}{\partial H}\right|_{G=CH+D}=0, \tag{25}$$

得

$$C^T\tilde{Q}(D+CH)+\tilde{R}H=0. \tag{26}$$

立即可得最优控制的解

$$H^*=-[C^T\tilde{Q}C+\tilde{R}]^{-1}C^T\tilde{Q}D. \tag{27}$$

又因为

$$\left.\frac{\partial^2 J}{\partial H^2}\right|_{G=CH+D}=C^T\tilde{Q}C+\tilde{R}>0,$$

所以由 (27) 式求出的 H^* 为性能泛函的极小值点. 将 H^* 代回 (13) 式便可得最优控制的近似值，也可得最优状态的近似值 $\hat{\Phi}_n^T(CH^*+D)$.

四、举例分析

考虑线性时变系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t),$$

求最优控制 $u(t)$ 使二次型性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1[\boldsymbol{x}^2(t)+\boldsymbol{u}^2(t)]\,dt$$

最小. 现取 $m=4$，利用 (27) 式编制的程序计算得最优控制和最优状态的 Walsh 级数为

$$u^*(t)\doteq-0.457\phi_0(t)+0.106\phi_1(t)+0.417\phi_2(t)+0.12\phi_3(t),$$

$$x_1^*(t)\doteq1.024\phi_0(t)-0.008\phi_1(t)-0.0117\phi_3(t),$$

$$x_2^*(t)\doteq1.006\phi_0(t)-0.021\phi_1(t)-0.0115\phi_3(t).$$

并求得最优性能的近似解 $J^*\doteq2.4797$. 根据精确求解得性能指标为 2.4511，计算结果令人满意. 显然随着 m 取值增大，求解精度将进一步提高. 此算法简便易求，计算量小，是最优控制数值分析法中具有较大吸引力的简便近似算法.

参 考 文 献

[1] Chen, C. F. and Hsiao, C. H., Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control Via Walsh Function, *IEEE. Trans. Autom. Control*, **AC-20**(1975), 596—603.

[2] Horng, I. R. and Ho, S. J., Discrete Walsh Operational-matrices for Analysis and Optimal Control of Linear Digital Systems, *Int. J. Control*, **42** (1985), 1443—1455.

[3] Rao, V. P. and Rao, K. R., Optimal Feedback Control Via Block-pulse Functions, *IEEE. Trans. Autom. Control*. **AC-24** (1979), 372—374.

ANALYSIS AND OPTIMAL CONTROL OF TIME-VARYING LINEAR SYSTEMS VIA WALSH SERIES

YANG CHENGWU HU JIANSHENG

(East China Institute of Technology, Nanjing)

ABSTRACT

By the expension of Walsh series, a new analysis and optimal control of time-varying linear systems is presented. This method changes the problem of optimal control into the limitation of algebrical equations. The procedure is very simple and clear, and treats the terminal conditions well, which is difficult in old algorithms. An example is illustrated, the results are satisfactory.

Key words: Optimal control; walsh series.