第 17 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 2
1991 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1991

参数空间中鲁棒稳定性问题[1)]

肖笛　程勉　高为炳
（北京航空航天大学第七研究室）

摘　　要

本文研究了单输入多输出（SIMO）和多输入单输出（MISO）线性定常控制系统在对象参数扰动下的鲁棒稳定性问题，并对一给定的控制器，系统在标称参数 $\boldsymbol{p}^0$ 下闭环渐稳的情况，提出了在参数空间中构造比中心位于 $\boldsymbol{p}^0$ 的最大稳定超球还要大的稳定超球的方法，从而改善了鲁棒稳定性判据.

关键词： 鲁棒稳定性，参数空间，同时镇定.

近年来，鲁棒控制的研究已成为现代控制理论中的热门课题．线性定常控制系统的鲁棒稳定性研究已有不少成果．特别是当对象是结构参数扰动的情形，有许多精彩的分析结果[1-9]．文献 [1] 研究了对象结构参数扰动线性地作用于系统时，控制系统的鲁棒稳定性问题，在参数空间中获得了一个稳定超球．只要扰动位于这个超球内，闭环系统必定渐稳．但这个超球的大小过分依赖于标称参数在参数空间中的位置，使结果的保守性较大.

本文针对这个问题，寻求出一种解决办法，得到了一些新结果.

一、问题的提出

考虑 SIMO 线性定常控制系统（对于 MISO 情形，可用同样方法），对象的传递函数为

$$G(s)=[n_1(s)/d_1(s),\cdots,n_m(s)/d_m(s)]^T=\boldsymbol{n}(s)d^{-1}(s),$$

其中 $d(s)$ 为 $G(s)$ 中所有元的最小公分母，且

$$d(s)=d_qs^q+\cdots+d_0,\ \boldsymbol{n}(s)=\boldsymbol{n}_qs^q+\cdots+\boldsymbol{n}_0.$$

这里 d_i 为实数，$\boldsymbol{n}_i\in \boldsymbol{R}^m$ 为常向量，且 $\boldsymbol{n}(s)$ 和 $d(s)$ 互质.

实际对象的参数 d_i 和 $\boldsymbol{n}_i$ 一般会受扰动．用 d_i^0，$\boldsymbol{n}_i^0$ 表示其标称值，用 Δd_i，$\Delta \boldsymbol{n}_i$ 表示其扰动．假定上述互质性在扰动下连续成立.

令 $\boldsymbol{p}=[\boldsymbol{n}_0^T, d_0,\cdots,\boldsymbol{n}_q^T, d_q]^T\in \boldsymbol{R}^K$，$K=(1+m)(1+q)$，表示对象参数向量，则

本文于 1990 年 1 月 9 日收到.
1）国家自然科学基金资助的课题．本文曾载于 1990 年中国航空学会年会论文集.

$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^0+\Delta\boldsymbol{p}$，其中 $\boldsymbol{p}^0=[\boldsymbol{n}_0^{0T}, d_0^0,\cdots,\boldsymbol{n}_q^{0T}, d_q^0]^T$，$\Delta\boldsymbol{p}=[\Delta n_0^T, \Delta d_0,\cdots,\Delta\boldsymbol{n}_q^T, \Delta d_q]^T$.

设控制器的传递函数为

$$c(s)=[n_{c1}(s),\cdots,n_{cm}(s)]/d_c(s)=d_c^{-1}(s)\boldsymbol{n}_c^T(s),$$

其中 $d_c(s)=d_{cl}s^l+\cdots+d_{c0}$，$\boldsymbol{n}_c^T(s)=\boldsymbol{n}_{cl}^Ts^l+\cdots+\boldsymbol{n}_{c0}^T$，这里 d_{ci} 为标量，$\boldsymbol{n}_{ci}\in\boldsymbol{R}^{1\times m}$，且 $d_c(s)$ 和 $\boldsymbol{n}_c(s)$ 左互质.

用 $\boldsymbol{\delta}$ 表示闭环系统的特征多项式

$$\delta(s)=\delta_0+\delta_1s+\cdots+\delta_ns^n,\ (n=l+q)$$

的系数向量，即 $\boldsymbol{\delta}=[\delta_n,\delta_{n-1},\cdots,\delta_0]^T\in\boldsymbol{R}^{n+1}$. 容易验证下述关系:

$$X\boldsymbol{p}=\boldsymbol{\delta},\quad X=\begin{bmatrix} & & & & \cdots & \boldsymbol{n}_{cl}^T & d_{cl} & \boldsymbol{n}_{cl}^T & d_{cl}\\ & & & & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & & & \cdots & \boldsymbol{n}_{c0}^T & d_{c0} & \boldsymbol{n}_{c0}^T & d_{c0}\\ & & \boldsymbol{n}_{cl}^T & d_{cl} & & & & & \\ \boldsymbol{n}_{cl}^T & d_{cl} & \vdots & \vdots & & & & & \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{n}_{c0} & d_{c0} & & & & & \\ \boldsymbol{n}_{c0}^T & d_{c0} & & & & & & & \end{bmatrix}$$

即控制器通过线性变换 $X\in\boldsymbol{R}^{N\times L}$，$N=1+q+l$，$L=(1+m)(1+q)$，将对象参数映射为特征多项式系数向量 $\boldsymbol{\delta}$.

定义 1. $\boldsymbol{\delta}\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是胡尔维茨的，当且仅当相应的 $\delta(s)$ 的根全部位于左半开复平面内.

定义 2. $\Delta_0=\{\boldsymbol{\delta}|\boldsymbol{\delta}\in\boldsymbol{R}^{n+1},\ \boldsymbol{\delta}_0=0\}$ $\Delta_n=\{\boldsymbol{\delta}|\boldsymbol{\delta}\in\boldsymbol{R}^{n+1},\ \boldsymbol{\delta}_n=0\}$；对于任意 $\omega\in[0,\infty)$，$\Delta(\omega)=\{\boldsymbol{\delta}|\boldsymbol{\delta}\in\boldsymbol{R}^{n+1},\delta(s)=(s^2+\omega^2)L(s)$，$L(s)$ 为任意的阶次为 $(n-2)$ 的多项式$\}$.

定义 3. $\pi_0=X^{-1}(\Delta_0)=\{\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^K, X\boldsymbol{p}\in\Delta_0\}$,

$\pi_n=X^{-1}(\Delta_n)=\{\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^K, X\boldsymbol{p}\in\Delta_n\}$,

$\pi(\omega)=X^{-1}(\Delta(\omega))=\{\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^K, X\boldsymbol{p}\in\Delta(\omega)\}$,

$S(\boldsymbol{p}^*,R)=\{\boldsymbol{p}|\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^*\|<R,R>0\}$.

易知 Δ_0，Δ_n，$\Delta(\omega)$ 为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的子空间，π_0，π_n，$\pi(\omega)$ 是 $\boldsymbol{R}^K$ 的子空间. 参数扰动的大小可以用欧氏范数来表征.

$$r_0(\boldsymbol{p}^*)=\min_{\boldsymbol{p}\in\pi_0}\|\boldsymbol{p}^*-\boldsymbol{p}\|,\ r_n(\boldsymbol{p}^*)=\min_{\boldsymbol{p}\in\pi_n}\|\boldsymbol{p}^*-\boldsymbol{p}\|,\ r(\boldsymbol{p}^*)=\inf_{\omega\in(0,\infty)}r(\boldsymbol{p}^*,\omega)$$

分别表示参数空间中参数 $\boldsymbol{p}^*$ 到 π_0，π_n，$\pi(\omega)$ 的距离，其中

$$r(\boldsymbol{p}^*,\omega)=\min_{\boldsymbol{p}\in\pi(\omega)}\|\boldsymbol{p}^*-\boldsymbol{p}\|.$$

假定在已给定的控制器作用下，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}^0$ 时，闭环系统渐稳，文 [1] 给出了以下定理.

定理 1. 中心位于 $\boldsymbol{p}^0$ 的最大稳定超球 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$ 的半径为 $\rho=\min\{r_0(\boldsymbol{p}^0),r_n(\boldsymbol{p}^0),r(\boldsymbol{p}^0)\}$.

显然，定理 1 中给出的最大稳定超球半径依赖于 $\boldsymbol{p}^0$ 的位置. 本文的目的是，1)求出中心位于 $\boldsymbol{p}'$ 的最大稳定超球 $S(\boldsymbol{p}',\rho')$，使得 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)\subset S(\boldsymbol{p}',\rho')$（如果可能）；2) 求出含 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$ 的最大的稳定超球（如果存在）.

二、主要结果

为便于述说，先引入以下定义.

定义 4. $\boldsymbol{p}$ 是稳定的，当且仅当 $\boldsymbol{\delta}=X\boldsymbol{p}$ 是胡尔维茨的，否则是不稳定的.

对于定理 1 的结论，下面分别对三种可能情形进行讨论.

1) $\rho=r_0(\boldsymbol{p}^0)$，即 $r_0(\boldsymbol{p}^0)\leqslant\min\{r_n(\boldsymbol{p}^0),r(\boldsymbol{p}^0)\}$. 依据文 [2,3] 中的方法可得

$$r_0^2(\boldsymbol{p}^*)=\boldsymbol{p}^{*T}A_1\boldsymbol{p}^*,\quad r_n^2(\boldsymbol{p}^*)=\boldsymbol{p}^{*T}A_2\boldsymbol{p}^*, \tag{1),(2}$$

$$r^2(\boldsymbol{p}^*,\omega)=\boldsymbol{p}^{*T}Q^T(QQ^T)^{-1}Q\boldsymbol{p}^*, \tag{3}$$

其中 $A_1=\dfrac{\boldsymbol{X}_{n+1}^T\boldsymbol{X}_{n+1}}{\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{X}_{n+1}^T}$，$A_2=\dfrac{\boldsymbol{X}_1^T\boldsymbol{X}_1}{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_1^T}$，$X=[\boldsymbol{X}_1^T,\cdots,\boldsymbol{X}_{n+1}^T]^T$，$\boldsymbol{X}_i\in\boldsymbol{R}^{1\times L}$，

$$Q=\begin{cases}B, & \text{当 } \det(BB^T)\neq 0 \text{ 时},\\ M_1, & \text{当 } \det(BB^T)=0 \text{ 时},\end{cases}\quad B=\begin{bmatrix}M_1\\M_2\end{bmatrix},$$

$$M_1=\boldsymbol{X}_{n+1}-\omega^2\boldsymbol{X}_{n-1}+\omega^4\boldsymbol{X}_{n-3}-\omega^6\boldsymbol{X}_{n-5}+\cdots,$$

$$M_2=\boldsymbol{X}_n-\omega^2\boldsymbol{X}_{n-2}+\omega^4\boldsymbol{X}_{n-4}-\omega^6\boldsymbol{X}_{n-6}+\cdots.$$

令 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}^0+\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T$（$\beta$ 为实数），易知

$$r_0^2(\boldsymbol{p}')=r_0^2(\boldsymbol{p}^0)+(2\alpha\beta+\beta^2)\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{X}_{n+1}^T,\ \left(\alpha=\frac{\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{p}^0}{\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{X}_{n+1}^T}\right), \tag{4}$$

$$r_n^2(\boldsymbol{p}')=r_n^2(\boldsymbol{p}^0)\ (\text{因为 } \boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{X}_1^T=0), \tag{5}$$

$$r^2(\boldsymbol{p}',\omega)=r^2(\boldsymbol{p}^0,\omega)+2\beta\boldsymbol{X}_{n+1}Q^T(QQ^T)^{-1}Q\boldsymbol{p}^0 + \beta^2\boldsymbol{X}_{n+1}Q^T(QQ^T)^{-1}\boldsymbol{X}_{n+1}^T. \tag{6}$$

引理 1. 对于任一固定 $\boldsymbol{p}'$，当 $\alpha\beta>0$ 时，必有 (i) $r_0(\boldsymbol{p}')=r_0(\boldsymbol{p}^0)+\|\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T\|$; (ii) $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)\subset S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$.

证明. (i) 利用 (1) 式和 (4) 式，进行直接运算，再由条件 $\alpha\beta>0$ 可证.

(ii) 当 $\alpha\beta>0$ 时，由 (4) 式知 $r_0^2(\boldsymbol{p}')>r_0^2(\boldsymbol{p}^0)$.

对任意 $\boldsymbol{p}\in S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$，有 $\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^0\|<\rho=r_0(\boldsymbol{p}^0)$. 因为 $\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'\|=\|(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^0)+(\boldsymbol{p}^0-\boldsymbol{p}')\|\leqslant\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^0\|+\|\boldsymbol{p}^0-\boldsymbol{p}'\|<\rho+\|\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T\|=r_0(\boldsymbol{p}')$（利用 (i) 的结论）. 所以 $\boldsymbol{p}\in S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$，即 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)\subset S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$. 证毕.

引理 2. 设 H 为 n 维希尔伯特空间，X 为其 $(n-1)$ 维子空间，Y 为 H 的子空间. 当 $Y\not\subset X$，$X\cap Y$ 非空时，对于任意 $\boldsymbol{x}\in H\backslash X\cap Y$，有

$$\min\{\min_{\boldsymbol{x}_1\in X}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1\|,\min_{\boldsymbol{x}_2\in Y}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2\|\}<\min_{\boldsymbol{x}_0\in X\cap Y}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|.$$

证明. 显然，上述不等式的左边不会大于右边. 因此，只需证明左边括号内的两项不可能同时等于右边的项.

用反证法. 设 $\min\limits_{\boldsymbol{x}_1\in X}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1\|=\min\limits_{\boldsymbol{x}_2\in Y}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2\|=\min\limits_{\boldsymbol{x}_0\in X\cap Y}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$. 由经典投影定理知，存在唯一的 $\boldsymbol{x}_1^*\in X$，$\boldsymbol{x}_2^*\in Y$，$\boldsymbol{x}_0^*\in X\cap Y$，使得 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1^*\|=\min\limits_{\boldsymbol{x}_1\in X}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1\|$，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2^*\|=\min\limits_{\boldsymbol{x}_2\in Y}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2\|$，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0^*\|=\min\limits_{\boldsymbol{x}_0\in X\cap Y}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$，故 $\boldsymbol{x}_0^*=\boldsymbol{x}_1^*=\boldsymbol{x}_2^*$. 因此，依投影定

理可知，$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0^*)\perp X$，$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0^*)\perp Y$。令 $M=\operatorname{span}\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0^*)\}$，其维数为1,则$M$的垂直补空间 $M^\perp$ 的维数为 $(n-1)$。由此推出，$X=M^\perp$，$Y\subset X$，这与条件矛盾。证毕。

下面给出主要结果。

定理 2. 当且仅当 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}^0+\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T$，$\alpha\beta\geqslant 0$ 时，稳定超球 $S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$ 包含 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$。

证明. 充分性由引理 1 可证。

必要性：当 $\boldsymbol{p}'\neq\boldsymbol{p}^0+\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T$ 时,假定 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)\subset S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$。

不难知道，存在唯一的 $\boldsymbol{p}_1\in\pi_0$ 使得 $r_0(\boldsymbol{p}^0)=\|\boldsymbol{p}^0-\boldsymbol{p}_1\|$。则可得，$\boldsymbol{p}^0=\boldsymbol{p}_1+k_1\boldsymbol{X}_{n+1}^T$，($k_1$ 为某个实数)。由假设知 $\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1\|\leqslant r_0(\boldsymbol{p}')$。

当 $S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$ 为稳定超球时，必须 $\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1\|=r_0(\boldsymbol{p}')$，否则 $\boldsymbol{p}_1$ 这个不稳定点将处于超球内。又由于 $\boldsymbol{p}'\neq\boldsymbol{p}^0+\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T$，显然，$\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1\neq k_2\boldsymbol{X}_{n+1}^T$ (k_2 为某实数)。由投影定理有 $\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1\|>\min\limits_{\boldsymbol{p}\in\pi_0}\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}\|$。这意味着存在 $\boldsymbol{p}^*\in\pi_0$ 使得 $\boldsymbol{p}^*\in S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$，与稳定性矛盾。

当 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}^0+\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T$ 时，若 $\alpha\beta<0$，则由引理 1 知 $r_0(\boldsymbol{p}')=|\alpha+\beta|\,\|\boldsymbol{X}_{n+1}^T\|=\big||\alpha|-|\beta|\big|\,\|\boldsymbol{X}_{n+1}^T\|$。当 $|\alpha|>|\beta|$ 时，$r_0(p')<|\alpha|\,\|\boldsymbol{X}_{n+1}^T\|=r_0(\boldsymbol{p}^0)$，显然不可能有 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)\subset S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$；当 $|\alpha|<|\beta|$ 时，$\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}^0\|=|\beta|\,\|\boldsymbol{X}_{n+1}^T\|>r_0(\boldsymbol{p}')$，这同样意味着 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)\subset S(\boldsymbol{p}',r_0(\boldsymbol{p}'))$ 是不可能的。因此,定理的结论成立。证毕。

定理 3. 当 $\alpha\beta\geqslant 0$，$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}^0+\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T$ 时，若 $r_0(\boldsymbol{p}')\leqslant\min\{r(\boldsymbol{p}'),r_n(\boldsymbol{p}')\}$，则 $S(\boldsymbol{p}',\rho')$ 为包含 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$ 的稳定超球，其中 $\rho'=r_0(\boldsymbol{p}')$。且当上述不等式取等号时，$S(\boldsymbol{p}',\rho')$ 为含有 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$ 的最大的稳定超球。

证明. 由引理 1 和定理 1,2 知,要证明 $S(\boldsymbol{p}',\rho')$ 为包含 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$ 的稳定超球，只需证明 $\boldsymbol{p}^0$ 稳定时，$\boldsymbol{p}'$ 亦稳定。

反设 $\boldsymbol{p}'$ 不稳定。由对参数的连续依赖性知，必存在 $0<k\leqslant 1$，当 $\boldsymbol{p}^*=\boldsymbol{p}^0+k\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T$ 时，使得 $r_0(\boldsymbol{p}^*)$，$r_n(\boldsymbol{p}^*)$，$r(\boldsymbol{p}^*)$ 至少有一个为零。但由引理 1 可知，当 $k\alpha\beta>0$ 时，$r_0(\boldsymbol{p}^*)>r_0(\boldsymbol{p}^0)$。故只可能有 $r_n(\boldsymbol{p}^*)=0$ 或 $r(\boldsymbol{p}^*)=0$。

不妨设 $r_n(\boldsymbol{p}^*)=0$ ($r(\boldsymbol{p}^*)=0$，同理可证),则 $\boldsymbol{p}^*\in\pi_n$。因为 $\alpha\beta>0$，$k>0$，由引理 2 可得 $r_0(\boldsymbol{p}')=r_0(\boldsymbol{p}^*)+\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}^*\|$。因为 $\boldsymbol{p}^*\in\pi_n$，所以 $r_n(\boldsymbol{p}')=\min\limits_{\boldsymbol{p}\in\pi_n}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'\|\leqslant\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}^*\|$，从而 $r_n(\boldsymbol{p}')<r_0(\boldsymbol{p}')$，这与已知矛盾。

反设当等号成立时，$S(\boldsymbol{p}',\rho')$ 不是含 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$ 的最大的稳定超球，则必存在另外一个稳定超球 $S(\boldsymbol{p}'',R)$，使得 $S(\boldsymbol{p}',\rho')\subset S(\boldsymbol{p}'',R)$。

不妨设 $r_0(\boldsymbol{p}')=r_n(\boldsymbol{p}')\leqslant r(\boldsymbol{p}')$ ($r(\boldsymbol{p}')\leqslant r_n(\boldsymbol{p}')$ 同理证)。易知存在唯一的 $\boldsymbol{p}_1\in\pi_0$，$\boldsymbol{p}_2\in\pi_n$，使得

$$r_0(\boldsymbol{p}')=\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1\|,\ r_n(\boldsymbol{p}')=\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_2\|. \tag{7}$$

由假设知 $\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_1\|\leqslant R$，$\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_2\|\leqslant R$，但 $S(\boldsymbol{p}'',R)$ 是稳定超球,故只可能取等号,即

$$\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_1\|=\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_2\|=R. \tag{8}$$

因为 $r_0(\boldsymbol{p}'')=\min\limits_{\boldsymbol{p}\in\pi_0}\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}\|\leqslant\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_1\|$，$r_n(\boldsymbol{p}'')=\min\limits_{\boldsymbol{p}\in\pi_n}\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}\|\leqslant\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_2\|$，而当 $S(\boldsymbol{p}'',R)$ 是稳定超球时，上述不等式只能取等号，否则，将存在 $\boldsymbol{p}^*\in\pi_0$ 或 $\boldsymbol{p}^*\in\pi_n$，使得 $\boldsymbol{p}^*\in S(\boldsymbol{p}'',R)$。因此，

$$r_0(\boldsymbol{p}'')=\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_1\|,\quad r_n(\boldsymbol{p}'')=\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_2\|. \tag{9}$$

由 $r_0(\boldsymbol{p}')=\|\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_1\|$ 和 $r_0(\boldsymbol{p}'')=\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_1\|$，利用文献[2]的方法可知，$\boldsymbol{p}''=\boldsymbol{p}'+k\boldsymbol{X}_{n+1}^T$，$k$ 为实数．则可得到 $\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_i+k\boldsymbol{X}_{n+1}^T$，$i=1,2$．令 $\Delta\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}_i$，$i=1,2$．由(7)式有

$$r_0^2(\boldsymbol{p}'')=r_0^2(\boldsymbol{p}')+2k\boldsymbol{X}_{n+1}\Delta\boldsymbol{p}_1+k^2\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{X}_{n+1}^T, \tag{10}$$

由(9)式得

$$r_n^2(\boldsymbol{p}'')=r_n^2(\boldsymbol{p}')+2k\boldsymbol{X}_{n+1}\Delta\boldsymbol{p}_2+k^2\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{X}_{n+1}^T. \tag{11}$$

因为 $r_0(\boldsymbol{p}'')=r_n(\boldsymbol{p}'')=R$，$r_0(\boldsymbol{p}')=r_n(\boldsymbol{p}')=\rho'$，故可以由(10)式，(11)式直接比较得 $(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)k\boldsymbol{X}_{n+1}^T=0$．

当 $k=0$ 时，显然，$S(\boldsymbol{p}'',R)=S(\boldsymbol{p}',\rho')$，即结论成立；当 $k\neq 0$ 时，有

$$\boldsymbol{X}_{n+1}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)=0, \tag{12}$$

因为 $\boldsymbol{p}_1\in\pi_0$，即 $\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{p}_1=0$，故(12)式意味着 $\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{p}_2=0$，即 $\boldsymbol{p}_2\in\pi_0$．因此，$\boldsymbol{p}_2\in\pi_0\cap\pi_n$．由引理 2 知 $\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_2\|\geqslant\min\limits_{\boldsymbol{p}\in\pi_0\cap\pi_n}\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}\|>\min\{r_0(\boldsymbol{p}''),r_n(\boldsymbol{p}'')\}$，但由前述已知 $r_n(\boldsymbol{p}'')=\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_2\|$，$r_0(\boldsymbol{p}'')=\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_1\|$，故 $\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_2\|>\|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}_1\|$，这就得到了与(8)式矛盾的结果．证毕．

定理 2,3 实际已给出具体构造出包含定理 1 中的稳定超球的最大的稳定超球 $S(\boldsymbol{p}',\rho')$ 的步骤如下：

a) 计算 $r_0(\boldsymbol{p}^0)$，$r_n(\boldsymbol{p}^0)$，$r(\boldsymbol{p}^0)$，$\alpha=\dfrac{\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{p}^0}{\boldsymbol{X}_{n+1}\boldsymbol{X}_{n+1}^T}$；

b) 比较 $r_0(\boldsymbol{p}^0)$，$r_n(\boldsymbol{p}^0)$ 和 $r(\boldsymbol{p}^0)$．如果 $r_0(\boldsymbol{p}^0)=\min\{r_n(\boldsymbol{p}^0),r(\boldsymbol{p}^0)\}$，则 $S(\boldsymbol{p}^0,\rho)$ 就是最大的，停止．否则，接着往下算；

c) 设 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}^0+\beta\boldsymbol{X}_{n+1}^T$，且 $\alpha\beta>0$．由(4)式和(5)式，令 $r_0(\boldsymbol{p}')=r_n(\boldsymbol{p}')$ 得

$$\beta=\begin{cases}\dfrac{r_n(\boldsymbol{p}^0)-r_0(\boldsymbol{p}^0)}{\|\boldsymbol{X}_{n+1}^T\|}, & \alpha>0,\\[2ex] \dfrac{r_0(\boldsymbol{p}^0)-r_n(\boldsymbol{p}^0)}{\|\boldsymbol{X}_{n+1}^T\|}, & \alpha<0.\end{cases}$$

令 $r_0(\boldsymbol{p}')=r(\boldsymbol{p}')$，即解下列方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dr^2(\boldsymbol{p}',\omega)}{d\omega^2}=0, & \omega>0,\\[2ex] r(\boldsymbol{p}',\omega)=r_0(\boldsymbol{p}'),\end{cases}$$

从而获得 β 的解．

在上述所有解得的 β 值中，选取满足 $\alpha\beta>0$ 的绝对值最小的一个．则相应的 $r_0(\boldsymbol{p}')$ 即为所求的最大的稳定超球半径．此时，超球的中心位于 $\boldsymbol{p}'$ 处．

2) $\rho=r_n(\boldsymbol{p}^0)$．与情形 1)的讨论完全类似．

3) $\rho=r(\boldsymbol{p}^0)$．令 $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}^0+k\boldsymbol{G}$，其中 $\boldsymbol{G}=Q^T(QQ^T)^{-1}Q\boldsymbol{p}^0$，$k$ 为实数．可以用

情形 1) 的相同方法进行分析.

至此,已考虑了定理 1 中全部可能情形,得到了构造最大的稳定超球的方法.

定理 4. 对于最大的包含 $S(\boldsymbol{p}^0, \rho)$ 的稳定超球 $S(\boldsymbol{p}', \rho')$, 当 $\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^0\|^2<\rho^2+2\rho\|\beta \boldsymbol{X}^T\|+2\beta \boldsymbol{X}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^0)$ 时,系统可镇定(即闭环系统渐稳). 其中 $\rho=\min\{r_0(\boldsymbol{p}^0), r_n(\boldsymbol{p}^0), r(\boldsymbol{p}^0)\}$, $\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}^0+\beta \boldsymbol{X}$,

$$\boldsymbol{X}=\begin{cases}\boldsymbol{X}_{n+1}, & \rho=r_0(\boldsymbol{p}^0),\\ \boldsymbol{X}_1, & \rho=r_n(\boldsymbol{p}^0),\\ \boldsymbol{G}, & \rho=r(\boldsymbol{p}^0).\end{cases}$$

定理 4 的证明是直接的. 定理 4 说明了一个简单事实, 即任何位于 $S(\boldsymbol{p}', \rho')$ 中的系统 $\boldsymbol{p}$ 是可以由已给定的控制器镇定的. 显然,这是对定理 1 的改进,且保守性小.

另外,由 $X\boldsymbol{p}=\boldsymbol{\delta}$ 的线性性,容易知道,当 $\boldsymbol{p}^*$ 稳定时, $a\boldsymbol{p}^*$ 亦必稳定,只要 a 为非零实数.

定理 5. 设 $M=\{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p}=a\boldsymbol{p}^*, \forall \boldsymbol{p}^* \in S(\boldsymbol{p}', \rho'), a$ 为非零实数$\}$,其中 $S(\boldsymbol{p}', \rho')$ 为包含 $S(\boldsymbol{p}^0, \rho)$ 的最大的稳定超球. Ω 为参数空间中的点集. 当 $\Omega \subset M$ 时, Ω 中的系统族能被同时镇定.

三、结 束 语

本文构造性地提出了获得包含定理 1 中给出的稳定超球的最大的稳定超球方法, 并给出了具体步骤,改善了鲁棒稳定性判据,得到了同时镇定系统族的充分条件. 所有的结果,从几何的观点来看,非常直观而简洁. 本文仅仅分析了给定控制器后系统的鲁棒稳定性问题,还有许多工作需要进一步努力.

参 考 文 献

[1] Biernacki, R. M., Hwang, H. and Bhattacharyya, S. P., Robust Stability with Structure Real Parameter Perturbations, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-32**(1987), 495—506.

[2] Bhattacharyya, S. P., Robust Stabilization Against Structure Perturbation, Spring-Verlag Berlin, Heidelberg, (1987).

[3] Wu Dongnan, Gao Weibing and Cheng Mian, On Robust Stability of Control Systems with Perturbed Parameters, Submitted to IEEE.

[4] Barmish, B. R., Invariance of the Strict Hurwitz Property of Polynomials with Perturbed Coefficients, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-29**(1984), 935—936.

[5] Soh, C. B., Berger, C. S. and Dabke, K. P., On the Stability Properties of Polynomials with Perturbed Coefficients, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-30**(1985), 1033—1036.

[6] Yedavalli, R. K., Perturbation Bounds for Robust Stability in Linear State Space Models, *Int. J. of Control.* **42**(1985), 1507—1517.

[7] Keel, L. H., Bhattacharyya, S. P. and Howze, J. W., Robust Control with Structured Perturbations, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-33**(1988), 68—78.

[8] Gaston, R. R. E. and Safonov, M. G., Exact Calculation of the Multivariable Stability Margin, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-33**(1988), 156—171

[9] Chpellat, H., Bhattacharyya, S. P. and Keel, L. H., Stability Margin for Hurwitz Polynomials, Proc. 27th Conf. on D. C., 1392—1398, Austin, Texas, U. S. A., (1988).

ROBUST STABILITY IN PARAMETER SPACE

Xiao Di　Cheng Mian　Gao Weibing
(*The Seventh Research Division Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

Abstract

The robust stability problem of single-input multi-output (SIMO) and multi-input single-output (MISO) linear time-invariant control systems with perturbed parameter is studied in this paper. For a given controller, if the closed loop system with nominal parameter vector $\mathbf{p}^0$ is asymptotically stable, a method to construct a stability hypersphere which contains the largest one centered at p^0 in the parameter space is proposed. As a result, a robust stability criterion is improved.

Key words: Robust stability; parameter space; simultaneous stabilization.