第 17 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 2
1991 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1991

非线性控制系统的拓扑结构

程代展　秦化淑　李树荣
(中国科学院系统科学研究所)

摘　　要

本文的目的是描述与分析非线性控制系统的拓扑结构. 文中首先定义可线性化系统，然后引入 Whitney 拓扑，并用此定义非线性控制系统族上的拓扑. 在这个拓扑下，证明了除单输入二维系统外，在一般情况下能线性化的系统是一个零测集. 最后讨论一般反馈线性化问题. 对输入数仅比系统维数少一的情况给出了充要条件，并证明了在此情况下几乎所有的系统均可线性化.

关键词: 可线性化系统，Whitney 拓扑，一般反馈控制.

一、引　　言

近年来，关于非线性系统精确线性化的研究发展很快. 线性化技术被用于机器人控制、飞行器导航、电力系统管理等各种工程设计中. 看来，似乎许多非线性系统都可以线性化. 幸运的是，牛顿系统和许多工程实际系统的确可以线性化[1-4]. 但从理论上很自然要提出这样一个问题: 究竟有多少系统是可以线性化的? 要解决这一问题就必须研究非线性系统族并赋予它一个适当的拓扑.

考虑一个仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i = f(x) + g(x)u. \tag{1.1}$$

这里 $x \in \boldsymbol{R}^n$, $f, g_1, \cdots, g_m \in V(\boldsymbol{R}^n)$. $V(\boldsymbol{R}^n)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 C^∞ 向量场集合. 以 Σ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 上 m 个输入的仿射非线性系统集，则 Σ 可以很自然地与 $V(\boldsymbol{R}^n)$ 的 $m+1$ 重乘积等同起来，即

$$\Sigma = \underbrace{V(\boldsymbol{R}^n) \times \cdots \times V(\boldsymbol{R}^n)}_{m+1}. \tag{1.2}$$

一个状态反馈控制定义为

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \tag{1.3}$$

这里 $\alpha(x) \in C_m^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, $C_m^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 为以 C^∞ 函数为元的 m 维向量的集合; $\beta(x) \in GL(m, C^\infty(\boldsymbol{R}^n))$, $GL(m, C^\infty(\boldsymbol{R}^n))$ 为 $m \times m$ 可逆 C^∞ 函数矩阵集合.

本文于 1990 年 8 月 10 日收到.

线性化问题定义如下[5]：找出一个状态反馈和一个微分同坯 $\phi:\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$，这个微分同坯可表现为全局坐标变换 $x \to z$，使得反馈系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{\alpha}(x) + g(x)\beta(x)\boldsymbol{v}$$

可以在 z 坐标中表现为一个完全能控的线性系统

$$\dot{\boldsymbol{z}} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{v}.$$

于是,线性化性质是由一个三元组 (ϕ, α, β) 所决定的．把这样的三元组集合记作 G,即

$$G = \{(\phi, \alpha, \beta)\}.$$

再在 G 上定义一个运算 $\oplus$ 如下:

$$(\phi_1, \boldsymbol{\alpha}_1, \beta_1)\oplus(\phi_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \beta_2) = (\phi_2\circ\phi_1, \boldsymbol{\alpha}_1 + \beta_1\boldsymbol{\alpha}_2, \beta_1\beta_2).$$

容易证明,G 在运算 $\oplus$ 下是一个群．并且,G 在 Σ 上的作用是标准群作用,即

1) $1\sigma = \sigma$;

2) $g_1(g_2\sigma) = g_1\oplus g_2(\sigma)$.

这里 $\sigma \in \Sigma$，$g_1, g_2 \in G$，并且 1 是 G 的单位元.

一个系统 σ 称为是可以线性化的,如果存在一个完全能控的线性系统 l，使得 l 在 σ 的轨道上,即

$$l \in G\sigma := \{g\sigma \mid g \in G\}.$$

当考虑局部线性化问题时，可以用给定点 x_0 的一个邻域 U 来代替 $\boldsymbol{R}^n$，而所有以上的讨论仍然成立.

要在 Σ 上定义拓扑,则要用到 Whitney 拓扑．下一节介绍一些它的基本性质.

二、Whitney 拓扑

由 (1.2) 式可知,如果能在 $V(\boldsymbol{R}^n)$ 上给出一个适合的拓扑，Σ 就是一个乘积拓扑空间,它具有自然的乘积拓扑．$V(\boldsymbol{R}^n)$ 上的一个标准拓扑称为 Whitney 拓扑[6,7].

定义 2.1. 设 X, Y 为两个光滑流形,且 $p \in X$，设 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}: X \to Y$ 为两个光滑映射，并且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}$．记 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 为 X 在 p 点邻域的一个局部坐标，$y = (y_1, \cdots, y_m)$ 为 Y 在 q 点邻域的一个局部坐标,并且 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ 已用局部坐标表示．如果

$$\left.\frac{\partial^{|s|}\boldsymbol{f}}{\partial x^s}\right|_p = \left.\frac{\partial^{|s|}\boldsymbol{g}}{\partial x^s}\right|_p, \text{ for } |s| \leqslant k,$$

这里 $s = (s_1, \cdots, s_n)$ 是一个多重指标,即

$$\frac{\partial^{|s|}}{\partial x^s} = \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_n^{s_n}},$$

则称 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 在 p 点 k-等价,记作 $\boldsymbol{f} = {}_k\boldsymbol{g}$．用 $J^k(X, Y)_{p,q}$ 记这些等价类的集合,那么

$$J^k(X, Y) = \bigcup_{(p,q)\in X\times Y} J^k(X, Y)_{p,q} \tag{2.1}$$

称为 k- 射流丛.

设 $\boldsymbol{f}: X \to Y$ 为一个给定的 C^∞ 映射．那么，就有一个自然嵌入映射 $j^k\boldsymbol{f}$: $X \to J^k(X,Y)_{p,q}$，它把 X 空间的每一点 x 映为 $\boldsymbol{f}$ 在 x 点的一个等价类．如果选

$$\left\{x, y, \left.\frac{\partial^{|s|}\boldsymbol{f}}{\partial x^s}\right|_x, |s| \leqslant k\right\},$$

作为等价类上的一个局部坐标,则有如下结论:

引理 2.2. $J^k(X, Y)$ 是一个光滑流形，并且如果 $\boldsymbol{f}$: $X \to Y$ 为光滑映射，则 $j^k\boldsymbol{f}: X \to J^k(X, Y)$ 也是光滑映射.

定义 2.3. 记从 X 到 Y 的光滑映射集合为 $C^\infty(X, Y)$. 设 U 为 $J^k(X, Y)$ 上的一个子集,令

$$W(U) = \{\boldsymbol{f} \in C^\infty(X, Y) \mid j^k\boldsymbol{f}(X) \subseteq U\}, \tag{2.2}$$

则集合 $\{W(U^k) \mid U^k$ 为 $J^k(X, Y)$ 中的开集, $k = 0, 1, \cdots\}$ 构成一个拓扑基. 这组基生成的拓扑称为 Whitney C^∞ 拓扑. 读者不难自行证明 $W(U^k)$ 构成一个拓扑基.

当考虑定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的系统时，向量场 $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}_1, \cdots, \boldsymbol{g}_m$ 等可看作 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的 C^∞ 映射. 即有如下等价关系:

$$V(\boldsymbol{R}^n) \cong C^\infty(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n),$$

从而给 Σ 以乘积 Whitney 拓扑.

三、可线性化系统

本节将证明: 在一般情况下可线性化系统的集合是一个零测集.

对于任意两个有穷维流形 M 和 N, 显见, $C^\infty(M, N)$ 不是一个有穷维流形. 因此, 首先要定义零测集.

定义 3.1. 一个集合 $Z \subseteq C^\infty(M, N)$ 称为零测集,如果存在零测集 $U^k \subseteq J^k(X, Y)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, 使得

$$W(Z) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k.$$

定理 3.2. 设 $n > 2$, 那么在 Whitney 拓扑意义下,可线性化系统的集合 L 是 Σ 中的一个零测集.

证明. 为避免不必要的复杂性,只证明单输入的情况. 对于多输入的情况,证明完全类似.

从文献 [5] 可知,如果系统 (1.1) 是可线性化的, 那么, $\boldsymbol{g}$, $ad_f\boldsymbol{g}$ 必须对合. 记 I 为满足这个对合条件的集合,即

$$I = \{\sigma \in \Sigma / \boldsymbol{g},\ ad_f\boldsymbol{g}\ \text{对合}\}.$$

那么, $L \subset I \subset \Sigma$. 现在, 只要证明 I 是零测集即可. 因为 $\boldsymbol{g}$ 与 $ad_f\boldsymbol{g}$ 对合等价于 $\boldsymbol{g}$, $ad_f\boldsymbol{g}$, $ad_{[f,g]}\boldsymbol{g}$ 线性相关,所以, $\sigma \in I$ 等价于

$$\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} \begin{vmatrix} g^i & (ad_f g)^i & (ad_{[f,g]} g)^i \\ g^j & (ad_f g)^j & (ad_{[f,g]} g)^j \\ g^k & (ad_f g)^k & (ad_{[f,g]} g)^k \end{vmatrix}^2 = 0. \tag{3.1}$$

这里 g^i 表示 g 的第 i 个分量,

$$(ad_f g)^j = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial g^j}{\partial x_i}\right) f^i - \left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i}\right) g^i\right],$$

$$\begin{aligned}(ad_{[f,g]}g)^j = \sum_{k=1}^{n}\Big\{&\frac{\partial g^j}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g^k}{\partial x_i} f^i - \frac{\partial f^k}{\partial x_i} g^i\right) \\ &-\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 g^j}{\partial x_i \partial x_k} f^i + \frac{\partial g^j}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f^i}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 f^j}{\partial x_i \partial x_k} g^i \\ &-\frac{\partial g^j}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f^j}{\partial x_i}\Big) g^k\Big\},\ j = 1,\cdots,n.\end{aligned}$$

因为(3.1)式左边只与 2 阶导数有关,因此,它是 $J^2(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)\times J^2(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$ 上的一个多项式. 通过选择特殊的 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 可以看出,这个多项式 P 不恒等零. 因此,(3.1)式的解集为 $J^2(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)\times J^2(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$ 上的一个零测集. 换言之,$j^2(I)$ 是 $J^2(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)\times J^2(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$ 上的一个零测集. 由定义 3.1 可知,在 Whitney 拓扑下,I 是 Σ 中的一个零测集.

注意,当考虑局部线性化问题时,$\boldsymbol{R}^n$ 可以由给定点的一个邻域所代替. 但上述讨论仍然不变,因而结论也仍然成立.

下面考虑唯一的例外情况,即当 $n=2$ 时,将有如下结论:

定理 3.3. 当 $n=2$ 时,对任意给定点 x_0,几乎所有的系统都是局部可线性化的.

证明. 只需证明不能线性化的系统集合是一个零测集即可. 根据文献[5]容易证明,在 $n=2$ 时,系统在 x_0 邻域可线性化当且仅当

$$\dim \operatorname{span}\{\boldsymbol{g},\ ad_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{g}\}|_{x_0} = 2.$$

类似定理 3.2 的证明可以知道,不能线性化的系统是一个零测集,即得结论.

四、奇异反馈控制

回到系统(1.1),到目前为止线性化问题考虑的都是正则反馈. 也就是说,在反馈控制(1.3)中 $\beta(x)$ 是可逆的. 如果取消这个限制,即允许 $\beta(x)$ 取不可逆阵,则可能使更多的系统线性化.

例 1.

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(x_2+x_3)\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^{x_1}+x_2x_3\\ x_1x_2\\ x_2^2\end{pmatrix}u_1 + \begin{pmatrix}x_3\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}u_2$$
$$= f + g_1u_1 + g_2u_2.$$

容易检验

$$[\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2] = (-x_3e^{x_1} - x_1x_3,\ e^{x_1} - x_1^2,\ -x_1x_2)^T \notin \operatorname{span}\{g_1, g_2\}.$$

因此,它不是正则反馈可线性化的[5]. 但如果选择一个奇异反馈

$$\beta(x) = (1,\ -x_2),$$

那么,不难检验,反馈系统是可以线性化的. 下面给出这种线性化的严格定义:

定义 4.1. 系统(1.1)称为一般反馈可线性化的,如果存在反馈

$$u = (\alpha_1,\cdots,\alpha_m)^T + (\beta_1,\cdots,\beta_m)^T v, \tag{4.1}$$

使得反馈后的单输入系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)\alpha_i(x) + \left(\sum_{i=1}^{m} g_i(x)\beta_i(x)\right) v \tag{4.2}$$

能够在一个适当的坐标骨架下表示为一个完全能控的线性系统.

命题 4.2. 如果系统 (1.1) 是正则反馈可线性化的,则它是一般反馈可线性化的.

证明. 根据 Hermann's 引理, 一个完全能控的线性系统可经过一个形如 (4.1) 式的一般反馈变为一个完全能控的单输入线性系统. 命题的结论由此可得.

由上述命题与例 1 可知,一般反馈线性化比正则反馈线性化更为有效.

下面集中考虑对 $m = n - 1$ 的仿射非线性系统的局部一般反馈线性化问题.

引理 4.3. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 空间中,设有局部坐标 $x = (x^1, x^2, x^3)$, 这里 $\dim(x^i) = n_i$, $i = 1,2,3$, 且 $\sum_{i=1}^{3} n_i = n$. 对应于这个局部坐标的块分解有两个向量场 $\boldsymbol{X}$ 和 $\bar{\boldsymbol{Y}}$, 它们的块分解形式如下:

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^1(x^1)^T, 0, \boldsymbol{X}^3(x)^T)^T,$$
$$\boldsymbol{Y} = (0, (\boldsymbol{Y}^2)^T, (\boldsymbol{Y}^3)^T)^T,$$

这里 $\boldsymbol{X}^1(x') \neq 0$. 则存在坐标 $z = z(x)$, 使得在此坐标下 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ 可表示为

$$z_*(\boldsymbol{X}) = (1, 0, \cdots, 0)^T,$$
$$z_*(\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Y}^2(x(z))^T, \bar{\boldsymbol{Y}}^3(z)^T)^T,$$

即, $\boldsymbol{Y}$ 的头两块分量保持不变.

证明. 不失一般性,设 $\boldsymbol{X}$ 的头一个分量不为零,则可选

$$(\boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{I}_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

构造映射

$$\boldsymbol{F}(z_1, \cdots, z_n) = \Phi_{z_1}^{X_1} \circ \Phi_{z_2}^{X_2} \circ \cdots \circ \Phi_{z_n}^{X_n}(x_0),$$

这里 $\Phi_z^X(p)$ 是 X 的以 p 为初值的积分曲线, 即 $\Phi_0^X(p) = p$. 那么, $\boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的零点邻域到 $\boldsymbol{R}^n$ 的 x_0 点邻域的一个局部微分同坯. 这是因为 $\boldsymbol{F}$ 的 Jacobian 矩阵在零点为

$$J_{\boldsymbol{F}}(0) = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n),$$

这是非奇异的.

由式 (4.3) 可以推出

$$F = \Phi_{z_1}^{X}(x_1^0, z_2 + x_2^0, \cdots, z_n + x_n^0),$$

记 $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}_1^T, \boldsymbol{F}_2^T, \boldsymbol{F}_3^T)^T$, 则有

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_1(z^1), \quad \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{z}^2 + (\boldsymbol{x}^0)^2.$$

并且 $\boldsymbol{F}$ 及 F^{-1} 的 Jacobian 矩阵分别为

$$J_F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z^1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial z^1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z^2} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z^3} \end{bmatrix}$$

$$J_{F^{-1}} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial z^1}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

这里×用来表示不定元. 利用式(4.4)并注意到 J_F 的第一列是 X, 则可得结论.

在以下的讨论中,设下述两条非奇异的条件在 x_0 邻域成立:

$A1$. $\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m$ 线性无关,

$A2$. $\Delta_i = \mathrm{span}\{ad^j_{g_p}g_k \mid p = 0,1,\cdots,m;\ k = 1,\cdots,m;\ j \leqslant i-1\}$

具有定常维数, $i = 1,2,\cdots$; $g_0 = f$.

定理 4.4. 设 $m = n-1$. 在非奇异条件 $A1$, $A2$ 下,系统(1.1)是一般反馈可线性化的充要条件为

$$\dim(\Delta_2) = n.$$

证明. 必要性. 设 $\dim(\Delta_2) < n$, 即 $\dim(\Delta_1) = \dim(\Delta_2) = n-1$, 则 $G=\mathrm{span}\{\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m\}$ 是对合的,且 $ad_f G \subset G$. 显见系统不能线性化.

充分性. 为方便计,设 $x_0 = 0$. 否则,先做一次平移即可.

由假设 $A1$, 可以找到一个可逆阵 β 使得

$$(\boldsymbol{g}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{g}_m)\beta = \left[\begin{array}{c} a_1\cdots a_{n-1} \\ \hline I_{n-1} \end{array}\right].$$

为方便计,仍将它们记作 $\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m$. 第二步可以选择 α 使得

$$\boldsymbol{f} + (\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m)\alpha = (c,\ 0,\cdots,0)^T.$$

这个新向量也仍记作 $\boldsymbol{f}$. 下面分两种情况讨论:

情况 1. 存在 $\boldsymbol{g}_j$, $j\in\{1,\cdots,m\}$, 使得

$$[\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g}_j] \notin G. \tag{4.5}$$

不失一般性,设 $j = n-1$. 由上述引理,可选择适当坐标,使得

$$(\boldsymbol{g}_1,\cdots,\boldsymbol{g}_m) = \left[\begin{array}{c|c} b_1\cdots b_{m-1} & 0 \\ \hline I_{m-2} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{f} = (d_1,\ 0,\cdots,0,\ d_n)^T.$$

令 $\bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f} - d_n\boldsymbol{g}_{n-1} = (d_1,\ 0,\cdots,0)^T$. 注意到反馈不影响式(4.5), 于是有 $[\bar{f},\ g_{n-1}] \neq 0$,即

$$\frac{\partial d_1}{\partial x_n} \neq 0 \tag{4.6}$$

令

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \bar{\boldsymbol{f}} + \sum_{i=1}^{n-2} \boldsymbol{g}_i x_i = (\hat{d}_1,\ x_1,\cdots,x_{n-1},\ 0)^T,$$

这里 $\hat{d}_1 = d_1 + x_1b_1 + \cdots + x_{n-2}b_{n-2}$. 显然,在 $x_0 = 0$ 的某个邻域 U 上(4.6)式对 $\hat{d}_1$ 也成立. 因此可以选择新坐标如下:

$$z_i = x_i,\quad i = 1,\cdots,n-1;\quad z_n = \hat{d}_1.$$

在新坐标下容易检验

$$\hat{f} = (z_n, z_1, \cdots, z_{n-2}, \hat{f}_n)^T,$$

$$g_{n-1} = \left(0, \cdots, 0, \frac{\partial \hat{d}_1}{\partial x_{n-1}}\right)^T.$$

如果选择反馈

$$\beta = \left(0, \cdots, 0, \left(\frac{\partial \hat{d}_1}{\partial x_n}\right)^{-1}\right),$$

$$\alpha = \left(0, \cdots, 0, -\hat{f}_n \left(\frac{\partial \hat{d}_1}{\partial x_n}\right)^{-1}\right),$$

则得到完全能控的线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_n \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v.$$

情况 2. 设 $[f, g_j] \in G$, $\forall j$. 则必定存在 i 和 j, 使得

$$[g_i, g_j] \notin G,$$

否则 $\dim(\Delta_2) < n$, 这与假定矛盾. 取反馈 $\hat{f} = f + g_i$, 则情况 2 变为情况 1.

由上述定理可以看出当 $m = n - 1$ 时，局部一般反馈线性化只要求一些非奇异条件. 类似定理 3.2 和定理 3.3 的证明，可以得到

推论 4.5. 当 $m = n - 1$ 时，对任一给定点 x_0 几乎所有的系统都是一般反馈局部可线性化的.

参　考　文　献

[1] Tarn, T. J., Cheng, D., Isidori, A., Pfaffian Basis for Affine Nonlinear Systems, Proc. of 26th CDC, Los Angeles, (1987), 493—504.

[2] Tarn, T. J., Bejczy, A. K. and Yun, X., Design of Dynamic Control of Two Coorperating Robot Arms, Closed Chain Formulation, Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Aut. Raleig, NC, 1987.

[3] Mayer, G., Su ,R. and Hunt, L. R., Application of Nonlinear Transformations to Automatic Flight Control, *Automatica*, **20**(1984), 1, 103—107.

[4] Cheng, D., Huang, S., Lee, W. K., Lue, J., Full Linearisation with Closed-loop Observer, *Trans. Inst. MC.* **12**(1990), 1, 49—56.

[5] Jakubczyk, B., respondek, W., On Linearization of Control Systems, *Bull. Acad. Polon Sci, Ser Sci. Math.* **28**(1980), 517—522.

[6] Hirsch, M. W., Differential Topology, Springer-Verlag, (1976).

[7] Golubitskey, M., Guillemin, V., Stable Mappings and Their Singularities, Berlin, Springer (1973).

[8] Heymann, M., Pole Assignment in Multi-input Linear Systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **AC-13**(1968), No. 6.

TOPOLOGY OF NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

CHENG DAIZHAN QIN HUASHU LI SHURONG
(*Institute of Systems Science, Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper is devoted to the description and analysis of the topology of nonlinear control systems. First of all, we define linearizable systems. Secondly, the basic concepts of Whitney topology are introduced, and used to describe the topology of the collection of nonlinear control systems. Under this topology we have shown that lineaizable set is a measure zero set unless $m=1$ and $n=2$ with m the input number and n the dimension of the state space. Thirdly, we discuss the problem of general feedback linearization. Necessary and sufficient conditions are given when $n=m+1$. Finally, we show that when $n=m+1$, all systems but a measure zero set are linearizable.

Key words: Linearizable systems; whitney topology, general feedback control.

中国自动化学会 1991 年重点学术会议计划

项目名称	主 要 内 容	时间	地 点	联 系 人
纪念中国自动化学会成立30周年暨全国第 3 届学术年会	发展自动化技术，努力为国民经济服务	11月	北 京	学会办公室 北京 2728信箱，邮码 100080
第 2 届全国计算机应用联合学术会议	交流计算机应用成果和经验，提高我国计算机应用水平与效益，推进我国计算机普及应用.	11月	北 京	组织委员会：学会办公室，北京2728信箱，邮码 100080. 程序委员会：兰云吉 北京 927 信箱，邮码 100083
91′自动化技术、应用及高新技术成果展览	展示我国自动化技术及有关领域的成就，近年来我国高新技术发展成果等内容，并准备组织相应的学术报告会、座谈会、讨论会.	11月	北京展览馆中央大厅	展览办公室：北京鼓楼西大街64号，魏福通、祁林 邮码100009
北京国际机电一体化学术会议	国内外机电一体化的现状、经验和发展前景，机电一体化理论方法探讨，机电一体化的典型应用和战略研究.	10	北 京	肖秀珍 北京德外机电部自动化所，邮码100011