

几何外形特性描述的角度编码方法

周 冠 雄

(华中理工大学计算机系, 武汉)

摘 要

本文分析外形曲线的几何性质及数字特征的角度编码描述及其解析计算。文中给出了何外形曲线的周长、方向宽度; 封闭曲线所围成的区域面积、矩及距离的解析计算公式; 证明了曲线封闭的充分必要条件; 阐明了角点特征的检测方法; 讨论了将二维形状分析转化为波形分析的角度编码方法。从而给出了一系列与 Freeman 方向编码理论相平行的理论结果^[3-6]。这些结果对于计算机视觉系统实施形状分析具有应用价值。

关键词: 角度编码, 外形曲线, 几何特性。

一、引 言

设在平面 P 上规定了 N 个标准方向, 且一几何外形曲线 M 之 Freeman 方向链码为 $u = u_1 \cdots u_i \cdots u_n$, 则由文献 [1] 知, 具有不同方向码 u_i 及 u_{i+1} 之相邻两直线段 r_i 及 r_{i+1} 之间的夹角 α (r_{i+1} 按反时针方向旋转至 r_i) 可由表征值 m 标示

$$\alpha := m \frac{2\pi}{N} = (u_{i+1} - \bar{u}_i) \frac{2\pi}{N}. \quad (1)$$

$$\bar{u}_i = \begin{cases} u_i + \frac{N}{2} & \forall 0 \leq u_i < \frac{N}{2}, \\ u_i - \frac{N}{2} & \forall \frac{N}{2} \leq u_i \leq N-1. \end{cases}$$

若 $\beta = \alpha + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 则视 $\beta = \alpha$, 于是有角度主值码 l (以下称为角度码), 它与角度表征值 m 之间成立关系式

$$l = m + kN, \quad k = 0, \pm 1. \quad (2)$$

文献 [1] 还指出, M 可唯一地表示为角度链码 $l_1 \cdots l_i \cdots l_n$. 当取 $N = 8$ 时 (在以下论述中如无说明均取 $N = 8$), 它是集合 $G = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ 上的字符串; 文献 [2] 则给出了直线角度链码之充分必要条件及其识别算法。

本文进一步研究如何应用角度编码实现外形曲线的特征描述与解析计算。

二、关于长度与面积的描述

1. 长度描述

定义 1. 外形曲线 M 之首角度码 l_1 定义为 r_1 与水平方向之间按式 (1) 及式 (2) 所确定之角度编码。

定义 2. 当 r_i 与水平方向之夹角为 $\frac{2\pi}{N}$ 之偶数倍时, 称为偶向直线段; 反之称为奇向直线段。显然, 若视觉系统采用正方形网格采样时, 网格边长为 d , 则偶向直线段之长度为 d , 奇向直线段之长度为 $\sqrt{2}d$ 。

引理 1. 若 $g' = \sum_{j=1}^i l_j$ 为奇数, 则 r_i 为奇向直线段; 若 g' 为偶数, 则 r_i 为偶向直线段(引理 1 的证明与定理 1 相似, 故略之)。

定理 1. 已知 M 之角度链码为 $l_1 l_2 \cdots l_i \cdots l_n$, 则 M 之长度为

$$L = \left(\sum_{i=1}^n 2^{\frac{g_i}{2}} \right) d, \quad g_i = \left(\sum_{j=1}^i l_j \right) \bmod 2. \quad (3)$$

证明。(用数学归纳法证)。设 $n=1$, 此时 M 仅由 r_1 组成, 对应之角度码为 l_1 。

若 l_1 为奇数, 则 $g'_1 = l_1$ 为奇数。由引理 1 知, r_1 为奇向直线段, $|r_1| = \sqrt{2}d$, 计及 $g_1 = l_1 \bmod 2 = 1$, 则 $2^{\frac{g_1}{2}} d = \sqrt{2}d$, 即 $L = 2^{\frac{g_1}{2}} d$; 若 l_1 为偶数, 则 $g'_1 = l_1$ 为偶数, 由引理 1 知, r_1 为偶向直线段, $|r_1| = d$, 计及 $g_1 = l_1 \bmod 2 = 0$, 则 $2^{\frac{g_1}{2}} d = d$, 即 $L = 2^{\frac{g_1}{2}} d$ 。

这表明当 $n=1$ 时定理成立。

假定当 $n=p$ 时定理成立, 则有

$$L = L_p = \left(\sum_{i=1}^p 2^{\frac{g_i}{2}} \right) d, \quad g_i = \left(\sum_{j=1}^i l_j \right) \bmod 2.$$

当 $n=p+1$ 时, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{p+1} 2^{\frac{g_i}{2}} \right) d = \left(\sum_{i=1}^p 2^{\frac{g_i}{2}} \right) d + 2^{\frac{g_{p+1}}{2}} d.$$

即

$$L_{p+1} = L_p + 2^{\frac{g_{p+1}}{2}} d.$$

为此, 仅需证明 $2^{\frac{g_{p+1}}{2}} = |r_{p+1}|$ 。

事实上, 由于

$$g_{p+1} = \left(\sum_{j=1}^{p+1} l_j \right) \bmod 2 = \left(\sum_{j=1}^p l_j + l_{p+1} \right) \bmod 2 = (g_p + l_{p+1}) \bmod 2.$$

因此, 若 $g_p = 0$, 此时, $g'_p = \sum_{j=1}^p l_j$ 为偶数, 由引理 1 知, r_p 为偶向直线段。于是, 当

l_{p+1} 为奇数时,表示 r_{p+1} 与 r_p 之间的夹角为 $\frac{2\pi}{N}$ 的奇数倍, r_{p+1} 为奇向直线段,故 $|r_{p+1}| = \sqrt{2}d$, 即 $L_{p+1} = L_p + \sqrt{2}d$, 而据上式有 $g_{p+1} = l_{p+1} \bmod 2 = 1$, 故最终有关系式 $L_{p+1} = L_p + |r_{p+1}|$; 当 l_{p+1} 为偶数时,表示 r_{p+1} 与 r_p 之间的夹角为 $\frac{2\pi}{N}$ 的偶数倍,即 r_{p+1} 为偶向直线段, $|r_{p+1}| = d$, 即 $L_{p+1} = L_p + d$, 而据上式则有

$$g_{p+1} = l_{p+1} \bmod 2 = 0,$$

故最终有关系式 $L_{p+1} = L_p + |r_{p+1}|$, 定理成立.

同理可证,当 $g_p = 1$ 时定理亦成立. 即当 $n = p + 1$ 时定理成立. 于是, 定理对任何 n 成立.

2. 曲线的封闭性

如何判定几何外形曲线的封闭性,是 Freeman 在文献[3]中给出的主要结果之一. 下面给出应用角度编码定量地判明曲线封闭的充要条件,从而使得这种判定是可计算的.

引理 2. 已知曲线的角度链码为 $l_1 l_2 \cdots l_i \cdots l_n$, 则 r_i 在 x 轴及 y 轴方向之改变量(相对于 r_{i-1}) Δx_i 及 Δy_i 分别为(取 $N = 8$)

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \operatorname{sgn}(|h_i| - 2)d, \\ \Delta y_i &= -\operatorname{sgn}\left(\sin \frac{h_i}{4} \pi\right)d. \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$h_1 = l_1, h_i = (h_{i-1} + l_i) \bmod 8 - 4, i = 2, 3, \cdots, n. \quad (5)$$

证明. 不失一般性,如图 1 所示规定八个绝对方向,以表示曲线上任一直线段的绝对方向,于是,其相应的增量 Δx_i 及 Δy_i 的变化由表 1 给出,用符号函数表示则可得出公式(4).

表 1 r_i 的增量值

h_i	Δx_i	Δy_i
-4	d	0
-3	d	d
-2	0	d
-1	$-d$	d
0	$-d$	0
1	$-d$	$-d$
2	0	$-d$
3	d	$-d$

由于 l_i 表示 r_i 按反时针方向旋转至 r_{i-1} 时的角度码是一个相对量,且 $h_i = -4$ 规定为 x 轴的方向,故公式(4)中显然应有 $h_i = (h_{i-1} + l_i) \bmod 8 - 4$, 而特别是 $h_1 = l_1$, $i = 2, 3, \cdots, n$. 引理证毕.

应该说明,由(5)式递推地给出的 h_i 表示曲线上第 i 个直线段的绝对方向,亦可以非递推公式给出:

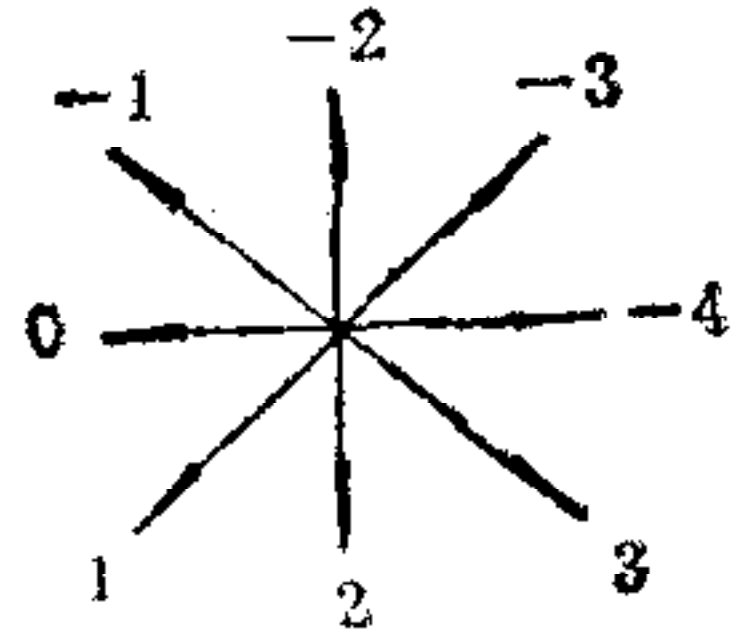


图 1 绝对方向

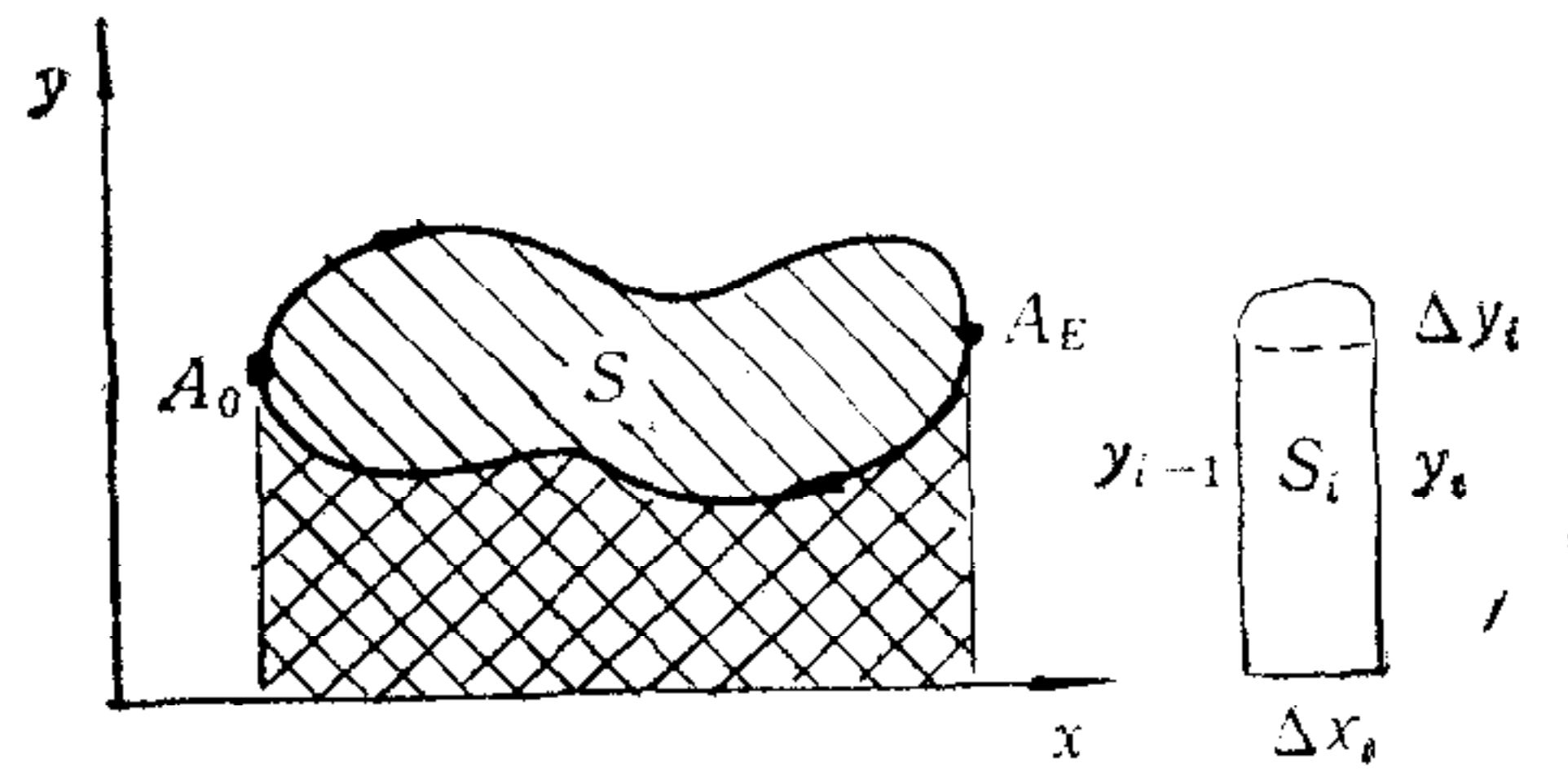


图 2 曲线所围面积

$$h = \left(\sum_{j=1}^i l_j \right) \text{mod} 8,$$

$$h_i = \begin{cases} h - 4, & i \text{ 为偶数,} \\ h, & i \text{ 为奇数, 且 } h \leq 3, \\ h - 8, & i \text{ 为奇数, 且 } h > 3. \end{cases} \quad (6)$$

于是, 下述推论显然成立.

推论 1. 已知任一 h_p , 当 $q > p$ 时, h_q 由下式给出:

$$h = \left(h_p + \sum_{j=p+1}^q l_j \right) \text{mod} 8,$$

$$h_q = \begin{cases} h - 4, & q - p \text{ 为奇数,} \\ h, & q - p \text{ 为偶数, 且 } h \leq 3, \\ h - 8, & q - p \text{ 为偶数, 且 } h > 3. \end{cases}$$

上式对于具体计算 h_i 等效于公式 (6).

由于 h_i 是可计算的, 故计及引理 2 中 Δx_i 及 Δy_i 之方向性, 显然下述定理成立.

定理 2. 封闭外形曲线之充分必要条件为 $\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0$ 及 $\sum_{i=1}^n \Delta y_i = 0$.

由公式 (5) 及公式 (6), 这一充要条件是可定量地判定的.

3. 面积描述

因为 M 上之多连通区域可归结为多个单连通之封闭区域来处理, 故仅需考虑单连通区域的情况.

定义 3. 考虑到 (4) 式中已规定了 Δx_i 及 Δy_i 之方向变化, 故如图 2 所示, 定义有向闭合外形曲线所围成的面积为上下两支有向曲线分别与 x 轴所夹面积代数 和 的 绝对值.

定理 3. 设闭合外形曲线具有角度链码 $l_1 l_2 \cdots l_i \cdots l_n$, 则由曲线所围成的面积为 (取正方形网格长度为 $d = 1$)

$$S = \left| \sum_{i=1}^n \Delta x_i \left(\sum_{j=1}^i \Delta y_j - \frac{1}{2} \Delta y_i \right) \right|, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (7)$$

证明. 因为坐标系之设置并不改变封闭曲线所围成的面积, 故不失一般性, 不妨假定 x 轴过初始点 A_0 . 按定义 3 可知

$$S = \left| \sum_{i=1}^n S_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n \Delta x_i (y_{i-1} + y_i) \frac{1}{2} \right|,$$

$$y_i = \sum_{j=1}^i \Delta y_j = y_{i-1} + \Delta y_i.$$

解出 y_{i-1} 代入上式即得(7)式。定理证毕。

三、关于距离与方向宽度的度量

1. 两点间的距离

设曲线的角度链码为 $l_1 l_2 \cdots l_i \cdots l_n$, 链中任意两点之间的子链为 $l_p l_{p+1} \cdots l_q$, 则这两点之间的距离可按如下步骤计算:

1) 按式(5)或式(6)计算 h_p , 并用 h_p 代换 l_p , 得 $h_p l_{p+1} \cdots l_q$, 再将此子链重新编码为按新下标排序(编码值不变)的子链 $l'_1 l'_2 \cdots l'_m$ ($m = q - p + 1$).

2) 应用式(4)及式(5)计算 Δx_i 及 Δy_i , 其中式(5)中之 l_i 用 l'_i 代换, 则 p 与 q 两点间的距离为

$$d_{pq} = \left[\left(\sum_{i=1}^m \Delta x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^m \Delta y_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

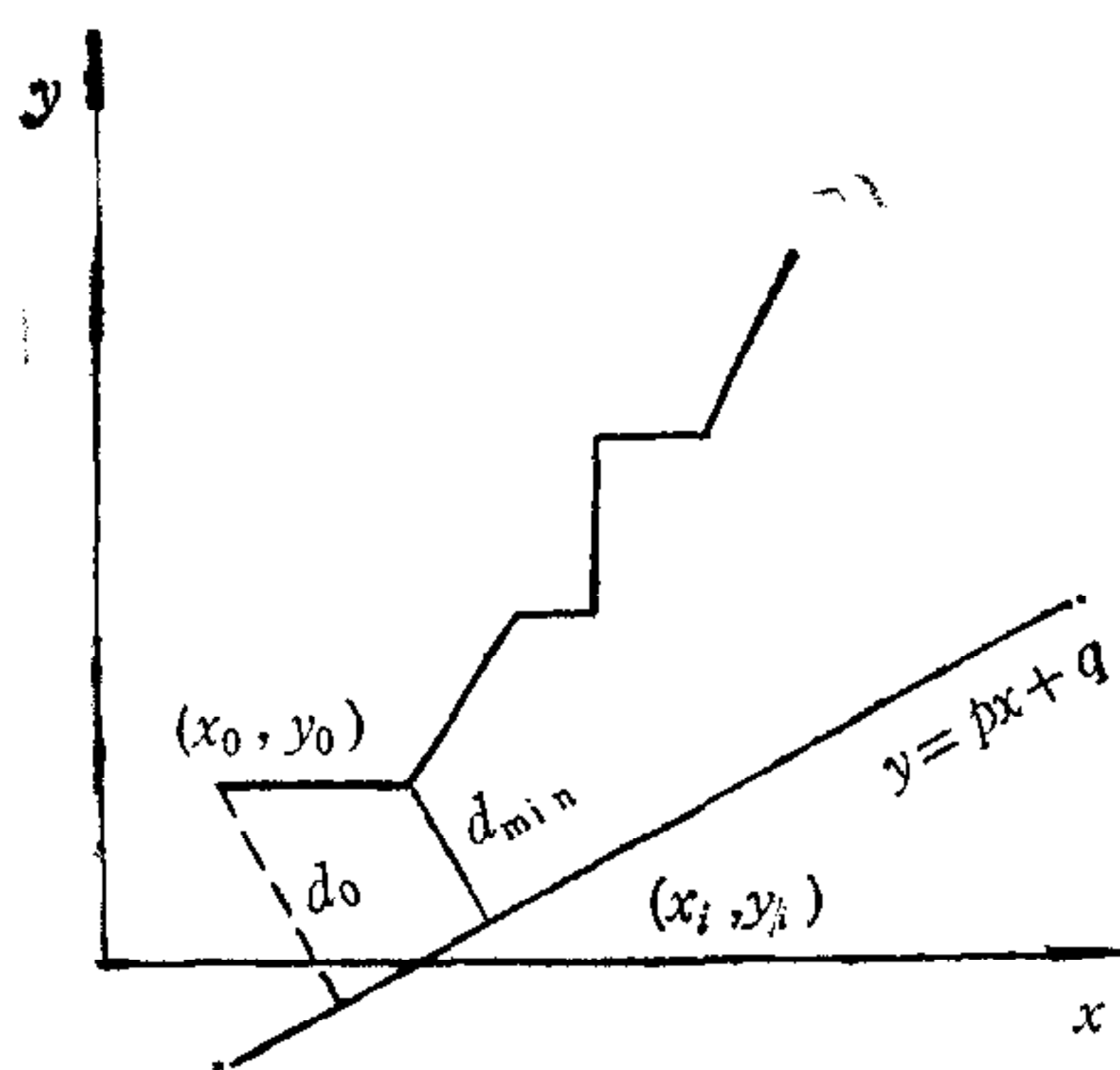


图 3 链与直线的距离

2. 链与直线的距离

如图 3 所示, 设有角度链码 $l_1 l_2 \cdots l_i \cdots l_n$, 起点坐标为 (x_0, y_0) , 与直线 $y = px + q$ 不相交, 求该链与直线之距离 d_{\min} .

为此, 令

$$\begin{cases} x_i = x_0 + \sum_{j=1}^i \Delta x_j, \\ y_i = y_0 + \sum_{j=1}^i \Delta y_j. \end{cases}$$

则链到 (x_i, y_i) 之距离为

$$d_i = \frac{|px_i - y_i + q|}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{|px_{i-1} - y_{i-1} + q + (p\Delta x_i - \Delta y_i)|}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

因为链与直线不相交, 故必位于直线的一侧。记

$$d'_i = (px_i - y_i + q) / \sqrt{1 + p^2},$$

它是一个形式上的不变量, 仅与 i 有关, 于是有递推关系

$$d'_i = d'_{i-1} + \frac{p\Delta x_i - \Delta y_i}{\sqrt{1 + p^2}} = d'_0 + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \sum_{j=1}^i \Delta x_j - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \sum_{j=1}^i \Delta y_j. \quad (9)$$

故最后有

$$d_{\min} = \min_i d_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \quad (10)$$

$$d_i = |d'_i| = \begin{cases} d'_i, & \forall d'_i > 0, \\ -d'_i, & \forall d'_i < 0. \end{cases} \quad (11)$$

3. 外形区域的 l -方向宽度

定义 4. 记 $E(l)$ 为外形区域的 l -方向宽度 ($l = 0, 1, 2, 3$)，它表示外形区域在 l -方向上的宽度延伸。显然，下述定理成立。

定理 4. 外形区域的 l -方向宽度 ($l = 0, 1, 2, 3$)

$$E(l) = \max_j w_j(l) - \min_j w_j(l), \quad (12)$$

$$w_j(l) = \sum_{i=1}^j l_{il}, \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

l_{il} 之数值由表 2 给出。

表 2 l_{il} 的值

h_i	l_{i0}	l_{i1}	l_{i2}	l_{i3}
-4	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$
-3	1	$\sqrt{2}$	1	0
-2	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$
-1	-1	0	1	$\sqrt{2}$
0	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$
1	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0
2	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$
3	1	0	-1	$-\sqrt{2}$

四、关于矩与形心的计算

定理 5. 外形区域关于 x 轴及 y 轴的一阶矩 $\mu_1(x)$, $\mu_1(y)$ 与二阶矩 $\mu_2(x)$, $\mu_2(y)$ 分别为

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \sum_{i=1}^n \Delta x_i \left[y_{i-1}^2 + \Delta y_i \left(y_{i-1} + \frac{1}{3} \Delta y_i \right) \right], \\ \mu_1(y) &= \sum_{i=1}^n \Delta y_i \left[x_{i-1}^2 + \Delta x_i \left(x_{i-1} + \frac{1}{3} \Delta x_i \right) \right], \\ \mu_2(x) &= \sum_{i=1}^n \Delta x_i \left[y_{i-1}^3 + \frac{3}{2} \Delta y_i y_{i-1}^2 + (\Delta y_i)^2 y_{i-1} + \frac{1}{4} \Delta y_i \right], \\ \mu_2(y) &= \sum_{i=1}^n \Delta y_i \left[x_{i-1}^3 + \frac{3}{2} \Delta x_i x_{i-1}^2 + (\Delta x_i)^2 x_{i-1} + \frac{1}{4} \Delta x_i \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

其中 Δx_i 及 Δy_i 由式 (4) 给出。

证明。仅以 $\mu_1(x)$ 为例证明，其它三个公式可类似地求得。

如图 4 所示，有

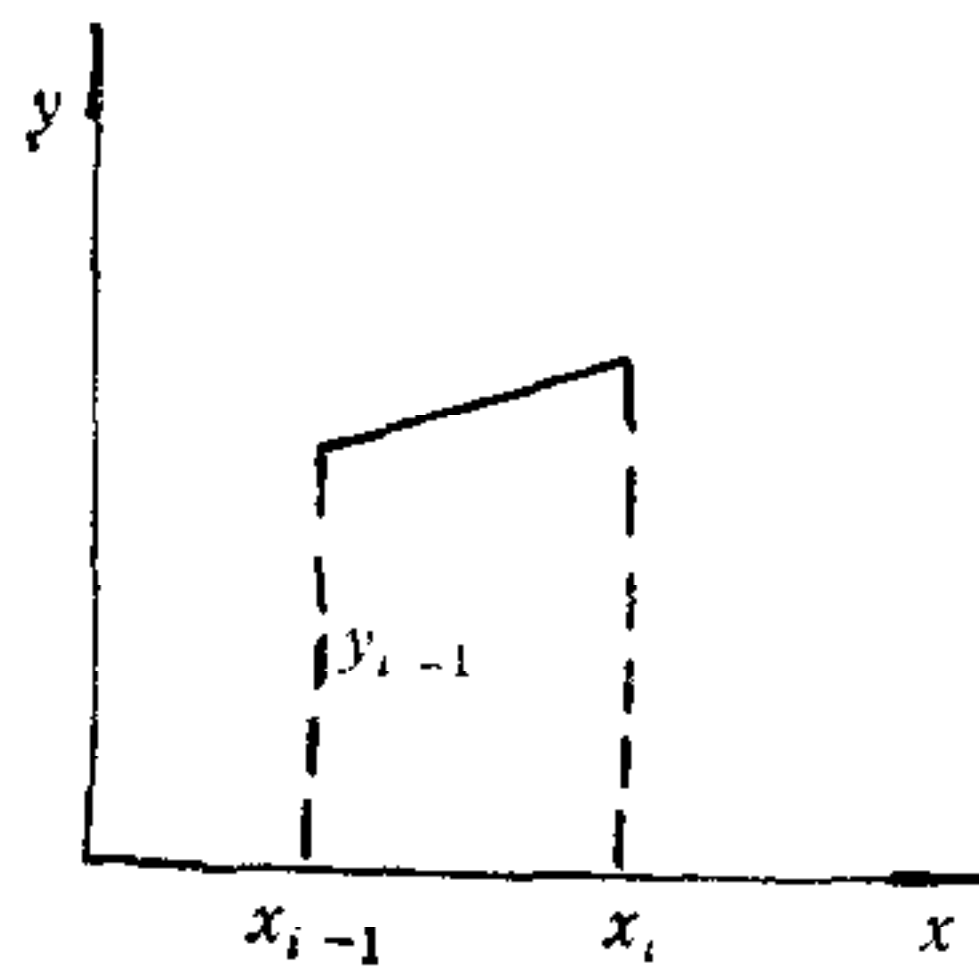


图4 $\mu(x)$ 的计算

故

$$\begin{aligned} \mu_{1i}(x) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} y^2 dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[y_{i-1} + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} (x - x_{i-1}) \right]^2 dx \\ &= \int_0^{\Delta x_i} \left[y_{i-1} + \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} x \right]^2 dx \\ &= \Delta x_i \left[y_{i-1}^2 + \Delta y_i \left(y_{i-1} + \frac{1}{3} \Delta y_i \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\mu_1(x) = \sum_{i=1}^n \mu_{1i}(x) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i \left[y_{i-1}^2 + \Delta y_i \left(y_{i-1} + \frac{1}{3} \Delta y_i \right) \right].$$

推论 2. 外形区域之形心位置为

$$\begin{cases} x_c = \mu_1(x) / S, \\ y_c = \mu_1(y) / S. \end{cases} \quad (14)$$

其中 S 由式 (7) 给出.

五、关于角点之检测

角点是外形图象的重要特征, 故角点检测在形状分析中异常重要. 本节给出应用角度编码检测角点的方法.

定义 5. 设 L 是外形区域的骨架或边界, 仍表述为 $L = l_1 l_2 \cdots l_i \cdots l_n$. 定义 L 在 l_i 处的向右 k 步斜率 θ_{rk} 为 l_i 到 l_{i+k} 的方向 ($k \geq 1$); 左向 k 步斜率 θ_{lk} 为 l_i 到 l_{i-k} 的方向; L 在 l_i 处的 k 步曲率 δ_k 为 $\theta_{lk} - \theta_{rk}$. k 步曲率明显不连续的点为 L 之角点.

1. 关于 k 步斜率之计算

θ_{lk} 的计算:

- 1) 按 (5) 或 (6) 式计算 h_{i-k} ;
- 2) 按 (4) 式计算 Δx_i 及 Δy_i , 并求取

$$\begin{cases} x = \sum_{j=i-k}^{i-1} \Delta x_j, \\ y = \sum_{j=i-k}^{i-1} \Delta y_j; \end{cases}$$

表 3 θ_{lk} 与 θ_{rk} 的值

x	y	θ_{lk} 及 θ_{rk}
0	>0	$\pi/2$
0	<0	$3\pi/2$
>0	≥ 0	$\arctg y/x$
>0	<0	$2\pi + \arctg y/x$
<0	≥ 0	$\pi + \arctg y/x$
<0	<0	$\pi + \arctg y/x$

3) 按表 3 给出斜率 θ_{ik} .

θ_{rk} 的计算:

1) 按 (5) 式或 (6) 式计算 h_i ;

2) 按 (4) 式计算 Δx_i 及 Δy_i , 并求取

$$\begin{cases} x = \sum_{j=i}^{i+k-1} \Delta x_j, \\ y = \sum_{j=i}^{i+k-1} \Delta y_j; \end{cases}$$

3) 按表 3 给出斜率 θ_{rk} .

2. 关于 k 步曲率的计算

由定义 5 知

$$\delta_k = |\theta_{ik} - \theta_{rk}|. \quad (15)$$

一般情况下可选用 $k=3$ 或 $k=4$, 并认为

$$\text{当 } |\theta_{ik} - \theta_{rk}| > \varepsilon \text{ 时} \rightarrow l_i \text{ 为角点} \quad (16)$$

ε 视识别对象而选择不同的值. 对于 $k=3$, 建议取 $\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)/4$; 对于 $k=4$, 建议取 $\varepsilon = \left(\frac{\pi}{2}\right)/6$.

六、形状分析转化为波形分析

应用角度编码可将二维形状分析转化为一维波形分析.

设 $l_1 l_2 \cdots l_i \cdots l_n$ 为外形区域的边界角度编码, 链之初始点为 (x_0, y_0) , 形心位置为 (x_c, y_c) , 将每一点 l_i 与形心联结, 记其距离为 d_{ci} , 作 $-d_{ci}$ 函数, 如图 5 所示, 则 d_{ci} 可由下式给出

$$d_{ci} = \left[\left(x_0 + \sum_{j=1}^i \Delta x_j - x_c \right)^2 + \left(y_0 + \sum_{j=1}^i \Delta y_j - y_c \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

于是, 可作出 d_{ci} 随 i 变化的曲线, 便可应用已有波形分析方法实施形状分析.

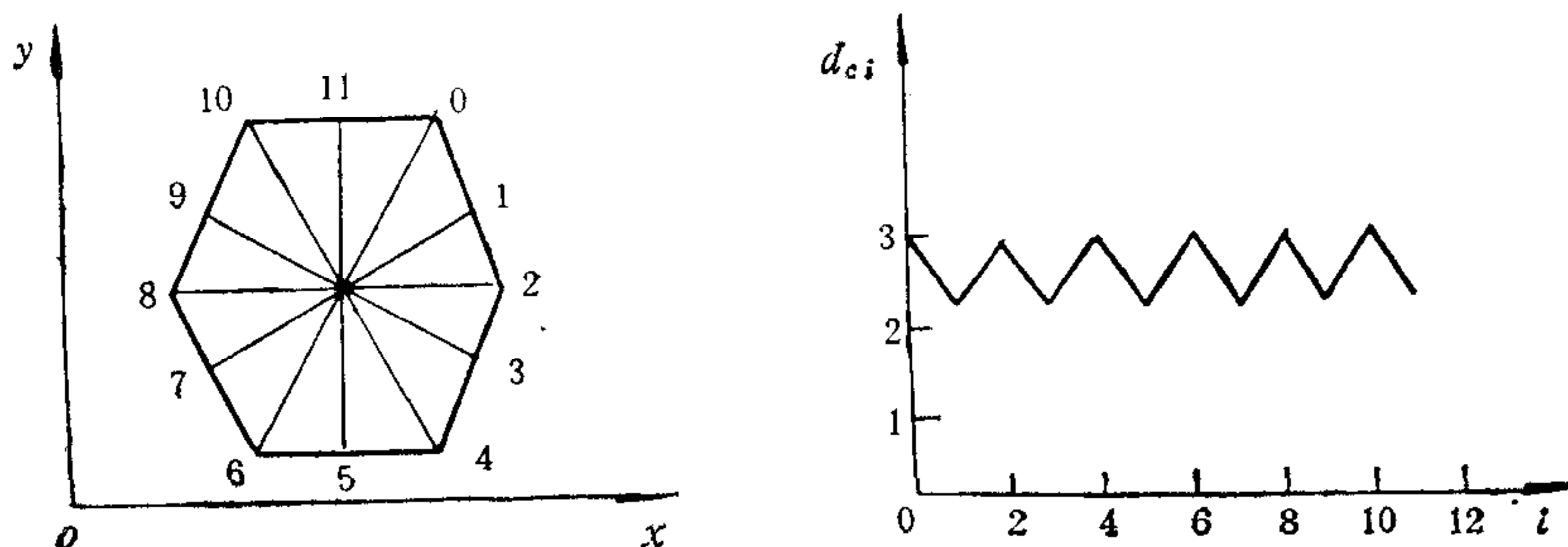


图 5 形状分析转化为波形分析

李斌、韩冰与郭一平在第二课堂实践及研究生就读期间曾先后参与本课题研讨及编程工作。

参 考 文 献

- [1] 周冠雄、王宏远,关于任意几何外形的角度编码方法,自动化学报, **13**(1987), 140—143.
- [2] 周冠雄、姚益平,关于直线的角度编码及其识别算法,计算机应用与软件, **5**(1988), 58—65.
- [3] Freeman, H., On the Encoding of Arbitrary Geometric Configuration, *IEEE Trans. EC-10*(1961), 260—268.
- [4] Freeman, H., Computer Processing of Linedrawing Image, *Computing Surveys* **6**(1974), 57—97.
- [5] Wu Lide, On the Freeman's Conjecture about the Chain Code of a Line, Proc. of 5th International Joint Conference on Pattern Recognition, USA, 1980, 251—254.
- [6] Xu Jianhua and Julius, T. Tou, Predictive Searching for Chain Encoding by Computer, *International Journal of Computer and Information Science*, **11**(1982), 4, 213—229.

ON ANGLE CODING DESCRIPTION OF FEATURES FOR ARBITRARY GEOMETRICAL CONFIGURATION

ZHOU GUANXIONG

(Dept. of Computer Science, Huanzhong University of Science and Technology)

ABSTRACT

The author presents a method of angle coding for arbitrary geometrical configuration in [1], and proves the sufficient and necessary conditions for straight line angle coding and gives the algorithm of recognition in [2]. In this paper, the description and analytical computation using angle coding for geometrical properties and numerical characteristics of configuration curves are studied in detail. The perimeter, the direction width of geometrical configuration curves, the area, moments and distance and their analytical computation formulations, the proof of the sufficient and necessary conditions for curvilinear seal, the method of detection for angle nodes and the method of converting two dimensional wave configuration into one dimensional wave using angle coding, etc. are presented. Therefore, we have obtained a set of theoretical results of angle coding which parallel with the theories of Freeman's direction coding [3-6]. These results have practical value for computer vision and shape analysis.

Key words: Angle coding; configuration curve; geometrical feature.