第 17 卷 第 2 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 2
1991 年 3 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Mar., 1991

广义系统一类鲁棒观测器的设计

谭华林　杨成梧
（华东工学院八系，南京）

摘　要

本文讨论了用观测器消除广义系统中由于模型误差、非线性因素、参数不确定及输入输出噪声产生的量测误差的可能性，给出了这类鲁棒观测器的存在条件，得到了相应的算法.

关键词: 观测器，鲁棒性，广义系统.

一、引　言

在实际工程问题中，模型误差、非线性因素、参数模糊及输入输出噪声所产生的量测误差对系统十分有害[1,5]. 由于广义系统中存在脉冲模，这种危害更为突出. 因此消除这些误差十分必要. 本文考察用观测器来消除量测误差的问题.

设广义系统为

$$\begin{aligned} E\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + F\boldsymbol{d}(x, u, t), \\ \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{d}(x, u, t). \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^n$; $\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{R}^p$; $\boldsymbol{y}\in \boldsymbol{R}^m$; $\boldsymbol{d}(x, u, t)\in \boldsymbol{R}^q$ 是系统 (1) 的量测误差，且是未知向量函数; E 为奇异方阵; A, B, C, D, F 为相应阶常值阵. 恒设系统 (1) 正则，即

$$\det(sE - A) \neq 0.$$

引理 1[2]. 设M是 $s\times t$ 阶矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 s 维矢量，则方程 $M\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是

$$(I_s - MM^{(1)})\boldsymbol{b} = 0, \tag{2}$$

且当方程有解时，其通解为 $\boldsymbol{x}=M^{(1)}\boldsymbol{b}+(I_t-M^{(1)}M)\boldsymbol{h}$. 这里，$M^{(1)}$ 表示M的任一$\{1\}$-逆，$\boldsymbol{h}$ 是任意 t 维矢量. 另外，若式 (2) 成立且M列满秩，则方程有唯一解

$$\boldsymbol{x} = M^{(1)}\boldsymbol{b}.$$

二、系统的化简

对系统 (1) 中的E进行奇异值分解 (SVD) 得

本文于 1988 年 6 月 6 日收到.

$$U^TEV=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中 $\Sigma=\operatorname{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r)$，$\sigma_i$ 为 E 的非零奇异值，U^T, V 为正交阵．再记

$$U^TAV=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix},\ U^TB=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix},\ U^TF=\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\end{bmatrix},$$

$$CV=[C_1, C_2],\ V^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

则系统 (1) 变为如下形式:

$$\Sigma\dot{x}_1=A_1x_1+A_2x_2+B_1\boldsymbol{u}+F_1\boldsymbol{d}, \tag{3}$$

$$0=A_3x_1+A_4x_2+B_2\boldsymbol{u}+F_2\boldsymbol{d}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{y}=C_1x_1+C_2x_2+D\boldsymbol{d}. \tag{5}$$

称上式为系统 (1) 的 SVD 坐标形式[3]．易见，它与系统 (1) 是受限系统等价 (r. s. e.) 的．

联立 (4) 式和 (5) 式可得

$$\begin{bmatrix}A_4\\ C_2\end{bmatrix}x_2=\begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}A_3\\ C_1\end{bmatrix}x_1-\begin{bmatrix}B_2\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}-\begin{bmatrix}F_2\\ D\end{bmatrix}\boldsymbol{d}. \tag{6}$$

记 $R=(A_4^T, C_2^T)^T$，$N=(A_3^T, C_1^T)^T$．系统 (1) 的正则性已保证了 (6) 式关于 x_2 有解．因此，由引理 1，只须证 R 列满秩，则 (6) 式关于 x_2 有唯一解．

引理 2. 若系统 (1) 脉冲能观，则 R 列满秩．从而 (6) 式有唯一解．

记 $T=(T_1, T_2)$ 为 R 的任一$\{1\}$-逆，其中 T_1 为 $(n-r)\times(n-r)$ 阶，由引理 1 知 (6) 式的唯一解为

$$x_2=T_2\boldsymbol{y}-TNx_1-T_1B_2\boldsymbol{u}-(T_1F_2+T_2D)\boldsymbol{d}. \tag{7}$$

显然，通过上式，x_2 的估计 $\hat{x}_2$ 可通过 x_1 的估计 $\hat{x}_1$ 而得到，而且，若 $\hat{x}_1$ 不受 $\boldsymbol{d}$ 的影响，如欲使 $\hat{x}_2$ 也不受 $\boldsymbol{d}$ 的影响，必须有

$$T_1F_2+T_2D=0. \tag{8}$$

将 (7)，(8) 两式代入 (3) 式整理可得

$$\dot{x}_1=\hat{A}x_1+\hat{B}\begin{bmatrix}u\\ y\end{bmatrix}+\hat{F}\boldsymbol{d}(x_1, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}, t). \tag{9}$$

再对方程 (6) 式运用有解条件 (2) 式可得

$$(I_{n+m-r}-RT)\left[\begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix}-Nx_1-\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}-\begin{bmatrix}F_2\\ D\end{bmatrix}\boldsymbol{d}\right]=0,$$

即

$$\hat{C}x_1+\hat{D}\boldsymbol{d}=\hat{H}\begin{bmatrix}u\\ y\end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中 $\hat{A}=\Sigma^{-1}(A_1-A_2TN)$，$\hat{B}=\Sigma^{-1}(B_1-A_2TB_2, -A_2T_2)$，$\hat{F}=\Sigma^{-1}(F_1-A_2T_1F_2-A_2T_2D)=\Sigma^{-1}F_1$，$\hat{C}=(I-RT)N$，$\hat{D}=(I-RT)\begin{bmatrix}F_2\\ D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_2\\ D\end{bmatrix}$，$\hat{H}=-(I-RT)$

$\begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$.

这样，得到了一个正常系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \hat{A}x_1 + \hat{B}\hat{u} + \hat{F}\boldsymbol{d}, \\ \hat{y} &= \hat{C}x_1 + \hat{D}\boldsymbol{d}. \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\hat{u} = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$, $\hat{y} = \hat{H}\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix}$ 为新的输入、输出，从而把设计广义系统 (1) 的不受量测误差影响的鲁棒观测器的问题转化为讨论正常系统 (11) 的相应问题.

三、观测器的存在性及算法

记

$$\Phi = I - \hat{F}(I - \hat{D}^{(1)}\hat{D})[(I - \hat{D}\hat{D}^{(1)})\hat{C}\hat{F}(I - \hat{D}^{(1)}\hat{D})]^{(1)}(I - \hat{D}\hat{D}^{(1)})\hat{C}. \tag{12}$$

引理 3. 系统 (11) 存在形如

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_c z + B_c\hat{u} + G\hat{y}, \\ \theta &= Hz + L\hat{y} \end{aligned} \tag{13}$$

的观测器的充分必要条件是

1) $\Phi\hat{F}(I - \hat{D}^{(1)}\hat{D}) = 0$，且

2) 矩阵对 $[\Phi(\hat{A} - \hat{F}\hat{D}^{(1)}\hat{C}), (I - \hat{D}\hat{D}^{(1)})\hat{C}]$ 能检测.

证. 记 $G = G_1 + G_2$, $e(t) = \theta(t) - x_1(t)$，则有

$$\begin{aligned} \dot{e} = \dot{\theta} - \dot{x}_1 &= H\dot{z} + L(\hat{C}\dot{x}_1 + \hat{D}\dot{d}) - \dot{x}_1 \\ &= (\hat{A} - L\hat{C}\hat{A} - HG_1)e + (HA_c - (\hat{A} - L\hat{C}\hat{A} - HG_1)H)z \\ &\quad + (HB_c + L\hat{C}\hat{B} - \hat{B})\hat{u} + (HG_2 - (\hat{A} - L\hat{C}\hat{A} - HG_1)L)\hat{y} \\ &\quad + (HG_1\hat{D} + L\hat{C}\hat{F} - \hat{F})d + L\hat{D}\dot{d}. \end{aligned}$$

根据上式，只须取 $B_c = \hat{B} - L\hat{C}\hat{B}$，则充分性和必要性的证明由文 [4] 易推得. 证毕.

上面的讨论已证明了本文的主要结果.

定理. 若系统 (1) 脉冲能观且 (8) 式成立，并有

1) $\Phi\hat{F}(I - \hat{D}^{(1)}\hat{D}) = 0$，及

2) 矩阵对 $[\Phi(\hat{A} - \hat{F}\hat{D}^{(1)}\hat{C}), (I - \hat{D}\hat{D}^{(1)})\hat{C}]$ 能检测，则系统 (1) 一定存在形如式 (13) 的正常状态鲁棒观测器. 进一步地，若 2) 加强为

2′) 矩阵对 $[\Phi(\hat{A} - \hat{F}\hat{D}^{(1)}\hat{C}), (I - \hat{D}\hat{D}^{(1)})\hat{C}]$ 能观；则该鲁棒观测器还可任意配置极点.

算法.

第一步. 化系统 (1) 为其 SVD 坐标形式；

第二步. 计算 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{F}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$；

第三步. 令

$A_c = \hat{A} - L\hat{C}\hat{A} - HG_1$, $B_c = B - L\hat{C}\hat{B}$,

$G_1 = \Phi\hat{F}\hat{D}^{(1)} + G_0(I - \hat{D}\hat{D}^{(1)})$, $G_2 = (\hat{A} - L\hat{C}\hat{A} - HG_1)L$,

$G=G_1+G_2,\ H=I,$

$L=\hat{F}(I-\hat{D}^{(1)}\hat{D})[(I-\hat{D}\hat{D}^{(1)})\hat{C}\hat{F}(I-\hat{D}^{(1)}\hat{D})]^{(1)}(I-\hat{D}\hat{D}^{(1)}),$

G_0 使 $\Phi(\hat{A}-\hat{F}\hat{D}^{(1)}\hat{C})-G_0(I-\hat{D}\hat{D}^{(1)})\hat{C}$ 稳定(或具有所希望的极点),

则 (13) 式是系统 (11) 的全阶鲁棒观测器,从而得到 $\boldsymbol{x}$ 的消除了 $\boldsymbol{d}$ 影响的估计式为

$$\hat{x}=\begin{bmatrix} I \\ -TN \end{bmatrix} z+\left(\begin{bmatrix} I \\ -TN \end{bmatrix} L\hat{H}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -T_1B_2 & T_2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

四、数 值 实 例

设广义系统的 SVD 坐标形式有如下系数阵:

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

通过直接计算易知此系统存在极点可任意配置的鲁棒观测器,而其观测器的系数阵为

$$A_c=\begin{bmatrix} -g_{11} & -1 & -g_{13} \\ 1-g_{21} & 2 & 2-g_{23} \\ 2-g_{31} & 1 & -1-g_{33} \end{bmatrix},\ B_c=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ H=I,\ L=0,$$

$$G_1=\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} \\ g_{21} & 1 & g_{23} \\ g_{31} & 0 & g_{33} \end{bmatrix},\ G_2=0,\ G_0=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}.$$

再由 (14) 式即得不受 d 影响的 $\hat{x}$(详细步骤略).

参 考 文 献

[1] Watanabe, K., et. al., Instrument Fault Detection in Systems with Uncertainties, *Int. J. Control*, **13**(1982), 137—158.

[2] 黄琳,系统与控制理论中的线性代数,科学出版社, 1984.

[3] Bender, D. J., et. al., The Linear-quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems, *IEEE*, **TAC-32** (1987), 672—688.

[4] Kurek, J., The State Vector Reconstruction for Linear Systems with Unknown Inputs, *IEEE.*, **TAC-28**(1983), 1120—1122.

[5] 葛卫、方崇智,一类鲁棒观测器的存在条件,自动化学报, **14**(1988), 31—37.

THE DESIGN OF A TYPE OF ROBUST OBSERVERS FOR SINGULAR SYSTEMS

TAN HUALIN　　YANG CHENGWU

(East China Institute of Technology)

ABSTRACT

In this paper, the authors discuss the possibility of using robust observers to detect instrument fault caused by modelling, nonlinearities, parameter ambiguity, and input output noise in singular systems. The conditions for the existence of such observers are given, and design algorithm is obtained.

Key words: Observers; robustness; singular systems.