第 17 卷 第 2 期
1991 年 3 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 17, No. 2
Mar., 1991

能控广义系统与不能控广义系统集之间的距离

邹 云 杨成梧
（华东工学院，南京）

摘 要

本文讨论了能控广义系统与不能控广义系统集之间的距离问题，得出了该距离的下界估计式及相应的算法.

关键词: 能控性，能观性，广义系统理论.

一、引 言

在文献 [1] 中分别讨论了广义系统

$$\theta: \begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Dx \end{cases}$$

的观控性的鲁棒性与数值判定问题，这里 $E, A \in R^{n\times n}$，$B \in R^{n\times m}$，$D \in R^{l\times n}$，E 奇异且 E, A 满足正则束条件

$$\det(sE - A) \neq 0, \quad s \in C. \tag{1}$$

C 为复数域. 文献 [1] 的结果表明，只有完全能控[4]的广义系统与不能控系统集的距离才大于 0，对该距离(无妨设为 μ_c) 的估计和计算十分有意义1). 因为只要使得计算过程中的累积误差 $\|(\delta E, \delta A, \delta B)\| < \mu_c(E, A, B)$，有关数值判定的结果就是完全正确的. 它显然也可作为能控性程度的一种度量. 关于正常系统(即在系统 θ 中 $\det E \neq 0$) 的相应问题已经由 Eising, R.[2] 于 1984 年获得完满的解决. 关于广义系统本文即给出了 μ_c 的下界估计式.

二、主 要 结 果

为简单计，本文不打算给出广义系统 θ 为 R-能控，强能控及 C-能控(即完全能控)的定义，有兴趣的读者可参见文献 [1] 及其列出的有关参考文献. 此外，由于能控性与能观

本文于 1989 年 1 月 16 日收到.

1) 杨成梧、邹云，广义系统观控性及正则束条件的数值判定，第一届控制与决策年会论文集 (I)，1989，重庆.

性的对偶性[5]，本文所有结果对能观性亦同样成立．

定义． 设 $\|\cdot\|$ 为 Frobenius 范数或 2-范数且系统 $\theta(E, A, B)$ 为 (R-；强；C-) 能控的，则称 $\mu_c \triangleq \inf\{\|(\delta E, \delta A, \delta B)\|\}$ 为 (R-；强；C-) 能控系统 $\theta(E, A, B)$ 到不能控集的距离．其中 $(\delta E, \delta A, \delta B)$ 使得 $\theta(E+\delta E, A+\delta A, B+\delta B)$ 不 (R-；强；C-) 能控．

定理 1. 任一 R-能控（强能控）的广义系统 $\theta(E, A, B)$ 到不能控集的距离均为零．

证　由文 [1] 的定理 2 及定理 5 立即可得．

定理 2. 设系统 $\theta(E, A, B)$ 为 C-能控的．则

$$\mu_c \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \min\{\min_{|s|\leqslant 1} \sigma_n(sE-A, B),\ \min_{|s|\leqslant 1} \sigma_n(E-sA, B)\}. \tag{2}$$

在证明该定理之前，先给出如下几个引理：

引理 1. 系统 $\theta(E, A, B)$ 为 C-能控的充要条件为

$$\operatorname{rank}(sE-A, B)=n, \quad |s| \leqslant 1, \tag{3}$$

及

$$\operatorname{rank}(E-sA, B)=n, \quad |s| \leqslant 1 \tag{4}$$

同时成立．

证．由文 [4] 知系统 $\theta(E, A, B)$ 为 C-能控的充要条件为

$$\operatorname{rank}(sE-A, B)=n, \quad \forall s \in C \tag{5}$$

及

$$\operatorname{rank}(E, B)=n \tag{6}$$

同时成立．显然只须证 (3)，(4) 式与 (5)，(6) 式等价即可．首先设 (5)，(6) 式成立，则显然 (5) 式蕴涵 (3) 式．注意到当 $|s| \geqslant 1$ 时，由 (5) 式可知

$$\operatorname{rank}(E-s^{-1}A, B)=n \tag{7}$$

成立．从而由 $|s| \geqslant 1$ 的任意性即知

$$\operatorname{rank}(E-sA, B)=n, \ 0<|s| \leqslant 1. \tag{8}$$

由此再由 (6) 式即可得 (4) 式．

反之若设 (3)，(4) 式成立，则 (4) 式显然蕴涵 (6) 式．且由(4)式还可知，当 $|s| \geqslant 1$ 时有 (7) 式成立．从而

$$\operatorname{rank}(sE-A, B)=\operatorname{rank}(sE-A, sB)=\operatorname{rank}(E-s^{-1}A, B)=n, \quad |s| \geqslant 1,$$

于是由此及 (3) 式即知 (5) 式成立．证毕．

引理 2. 设 $\|\cdot\|$ 为矩阵的 Frobenius 范数或 2-范数[7]，$E, A \in C^{n\times n}$，$B \in C^{n\times m}$，则

$$\|(E+A, B)\| \leqslant \sqrt{2}\,\|(E, A, B)\|. \tag{9}$$

证．先设 $\|\cdot\|$ 为 Frobenius 范数 $\|\cdot\|_F$．则由定义

$$\|(E+A, B)\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |e_{ij}+a_{ij}|^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} (|e_{ij}|^2+|a_{ij}|^2) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |b_{ij}|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} Re(e_{ij}a_{ij})\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(|e_{ij}|^2+|a_{ij}|^2)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|b_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{2}\,\|(E,\ A,\ B)\|_F. \tag{10}$$

其中 e_{ij}, a_{ij}, b_{ij} 分别为 E, A, B 的分量.

再设 $\|\cdot\|$ 为 2-范数 $\|\cdot\|_2$, 若记 $\lambda_1(\cdot)$ 为矩阵$(\cdot)$的最大特征值,则按定义

$$\|(E+A,\ B)\|_2=\lambda_1^{1/2}\{(E+A)(E+A)^H+BB^H\}$$

$$=\lambda_1^{1/2}(EE^H+AA^H+BB^H+EA^H+AE^H). \tag{11}$$

其中上角H表示共轭转置.

注意到对于任意的 Hermite 矩阵 Q, 有

$$\lambda_1(Q)=\max_{\|x\|_2=1}(\boldsymbol{x}^H Q\boldsymbol{x}), \tag{12}$$

故易知

$$\lambda_1(EE^H+AA^H+BB^H+EA^H+AE^H)$$

$$\leqslant \lambda_1(EE^H+AA^H+BB^H)+\lambda_1(EA^H+AE^H). \tag{13}$$

又由 (12) 式知

$$\lambda_1(EA^H+AE^H)=\max_{\|x\|_2=1}\sum_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{x}_i\left(\sum_{k=1}^{n}e_{ik}\bar{a}_{jk}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\bar{e}_{jk}\right)\bar{\boldsymbol{x}}_j$$

$$=\max_{\|x\|_2=1}2\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n}e_{ik}\boldsymbol{x}_i\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{jk}\bar{\boldsymbol{x}}_j\right)$$

$$\leqslant \max_{\|x\|_2=1}\sum_{k=1}^{n}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}e_{ik}\boldsymbol{x}_i\right|^2+\left|\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\boldsymbol{x}_j\right|^2\right)$$

$$=\lambda_1(EE^H+AA^H)\leqslant\lambda_1(EE^H+AA^H+BB^H). \tag{14}$$

故由此及 (12), (13) 式即知 $\|(E+A,\ B)\|_2\leqslant\sqrt{2}\,\|(E,\ A,\ B)\|_2$. 证毕.

引理 3. 设 $s\in C$, 且 $|s|\leqslant 1$, $\|\cdot\|$ 及 E, A, B 同上引理所述,则

$$\|(sE,\ A,\ B)\|\leqslant\|(E,\ A,\ B)\|. \tag{15}$$

证. 由 Frobenius 范数的定义以及 (12) 式立即可知本引理成立.

显然由引理 2 和引理 3 便知

引理 4. 设 $|s|\leqslant 1$, 而 E, A, B 及 $\|\cdot\|$ 如上述引理所述. 且令 $E'=E+\delta E$, $A'=A+\delta E$, $B'=B+\delta B$, 则

$$\|(s\delta E-\delta A,\ \delta B)\|\leqslant\sqrt{2}\,\|(\delta E,\ \delta A,\ \delta B)\|. \tag{16}$$

从而由 (16) 式及矩阵奇值理论[6]即可知: 若 (3), (4) 两式和

$$\|(E'-E,\ A'-A,\ B'-B)\|<\frac{1}{\sqrt{2}}\min\{\min_{|s|\leqslant 1}\sigma_n(sE-A,\ B),\ \min_{|s|\leqslant 1}\sigma_n(E-sA,\ B)\} \tag{17}$$

同时成立,则

$$\mathrm{rank}(sE'-A',\ B')=n,\quad |s|\leqslant 1, \tag{18}$$

$$\mathrm{rank}(E'-sA',\ B')=n\quad |s|\leqslant 1 \tag{19}$$

亦同时成立. 由引理 1 即知系统 $\theta(E',\ A',\ B')$ 亦 C-能控, 故按 μ_c 的定义便知 (2) 式

成立，故定理 2 得证.

若同时还考虑正则束条件 (1) 的保持性，则有

$$\mu_c(E, A, B) \geqslant \min\{\min_{|s|\leqslant 1} \sigma_n(sE - A, B), \min_{|s|\leqslant 1} \sigma_n(E - sA, B),$$
$$\sup_{s \in C} \sigma_n(sE - A)\}. \tag{20}$$

令 $s = re^{i\theta}$，则由 Lagrange 乘数法可得如下算法:

算法.

先定义 Lagrange 函数为

$$L_1(r, \theta, \lambda, \mu) = \lambda + \mu \det(\lambda I - (re^{i\theta}E - A, B)(re^{i\theta}E - A, B)^H),$$
$$L_2(r, \theta, \lambda, \mu) = \lambda + \mu \det(\lambda I - (E - re^{i\theta}A, B)(E - re^{i\theta}A, B)^H).$$

然后利用 Lagrange 乘数法进行计算即可求得 $\min\limits_{|s|\leqslant 1} \sigma_n(sE-A,B)$ 与 $\min\limits_{|s|\leqslant 1} \sigma_n(E - sA, B)$. 至于 $\sup\limits_{s \in C} \sigma_n(sE - A)$ 亦可依据对策论中有关算法[7]进行计算.

注. 关于能控正常系统到不能控系统集的距离，文献 [2, 3] 都给出了下述结果. 如果将摄动 δA, δB 的分量限制在实数域上，则

$$\mu_c = \min_{s \in R} \sigma_n(sI - A, B). \tag{21}$$

遗憾的是上式实际上是不成立的. 考虑如下正常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \varepsilon > 0 \text{ 充分小}, \tag{22}$$

则 $(sI - A, B)(sI - A, B)^H = \begin{bmatrix} |s|^2 + 1 + \varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & |s|^2 + 1 + \varepsilon^2 \end{bmatrix}$，显然

$$\min_{s \in R} \sigma_2(sI - A, B) \approx 1,$$

但若取 $\delta A = 0$, $\delta B = -\varepsilon \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，则 $\operatorname{rank}(sI - (A + \delta A), (B + \delta B))|_{s=i} = 1 < 2$. 此即表明 $\|(\delta A, \delta B)\| \leqslant \min\limits_{s \in R}(sI - A, B)$，不足以保持能控性在实摄动下不变，故 (21) 式一般不成立.

参　考　文　献

[1] 杨成梧、邹云，广义系统能控性的鲁棒性，华东工学院学报，1988. No. 1, 1—11.

[2] Eising, R. Between Controllabe and Uncontrallable, *Systems & Control letters*, Vol. 4, No. 5, 263—264.

[3] Boley, D. L. and Lu, Wusheng, Measuring How Far a Controllable System is from an Uncontrollable One, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, **31**(1986), 3, 249—251.

[4] Yip, E. L. and Sincovec, R. F., Solvablilty, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 26(1981), 702—707.

[5] Cobb, D., Controllability, Observability and Duality in Singular Systems, *IEEE*., T-AC29(1984), 1076—1082.

[6] 黄琳，系统与控制理论中的线性代数，科学出版社，1984.

[7] 王建华，对策论，清华大学出版社，1986.

THE DISTANCE BETWEEN CONTROLLABLE AND UNCONTROLLABLE SINGULAR SYSTEMS

ZOU YUN YANG CHENGWU
(East China Institute of Technology)

ABSTRACT

In this note we discuss the distance between a singular system (E, A, B) and the set of uncontrollable systems, and present the lower and the upper bounds of this distance and the corresponding algorithm.

Key words: Controllability; observability; singular system.

(上接第 247 页)

中国自动化学会 1991 年一般专题学术会议计划

项目名称	主要内容	时间	地 点	联 系 人
微机局部网络学术讨论会	交流微机局部网络的学术成果、经验和存在的问题	12月	深 圳	肖秀珍，北京德外机电部自动化所，邮码 100011
微机在工业控制中应用学术交流会	微机在工业控制中的应用成果分析、存在的问题及解决办法	11月	北 京	肖秀珍，北京德外机电部自动化所，邮码 100011
名词委员会工作会议	1、对原审词条进行修改补充；2、征集新词条；3、筹划编撰自动化名词词典	待定	待 定	范瑞霞，北京理工大学自控系，邮码 100081
普及工作委员会工作会议	总结汇报工作，交流科普工作情况，讨论落实下一步工作	1季度	成 都	杜 欣，北京自动化技术所，邮编 100009
信息交流讨论会	以自动控制系统为主开展生产厂与设计院之间的信息交流科普活动，为国民经济建设服务	3季度	承 德	同 上
筹备我会举办科普夏令营工作会议	联合各有关学会、协会共同举办，拍摄、编辑自动化科技知识的录象落实各种物质条件	待定	待 定	同 上
第7届全国系统与控制科学青年学术年会	例行年会	待定	广东江门	程新刚，中科院自动化所，邮码 100080
控制理论及其应用年会	控制理论专业委员会例行年会	10月	烟 台	王恩平，中科院系统科学所，邮编 100080