第 17 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 2
1991 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1991

通过传递函数的状态空间实现求H$^\infty$-范数

张钟俊 施颂椒 胡庭姝
(上海交通大学自动控制系)

摘 要

本文揭示了传递函数的 H$^\infty$- 范数与其状态空间实现之间非常重要的关系，并通过这种关系得出了一种求 H$^\infty$- 范数的简单方法.

关键词: H$^\infty$-控制, H$^\infty$-范数,状态空间实现,特征值轨迹.

一、引 言

传递函数的 H$^\infty$-范数在数学上早就有过定义[1],但以前并未受到足够重视. 只是到了 1981 年 Zames 在文献 [2] 中提出了 H$^\infty$- 优化方法, H$^\infty$- 范数才被越来越多的人所了解,现已被广泛地用于系统分析和设计中.

如图 1 所示的反馈控制系统，其中 $P(s)$ 为被控对象，$C(s)$ 为反馈, d 为噪声, y 为输出. 假设系统闭环稳定,则 $(I+PC)^{-1}$ 的 H$^\infty$-范数 $\|(I+PC)^{-1}\|_\infty$, 表示了从噪声 d 到输出 y 的最大能量放大倍数.

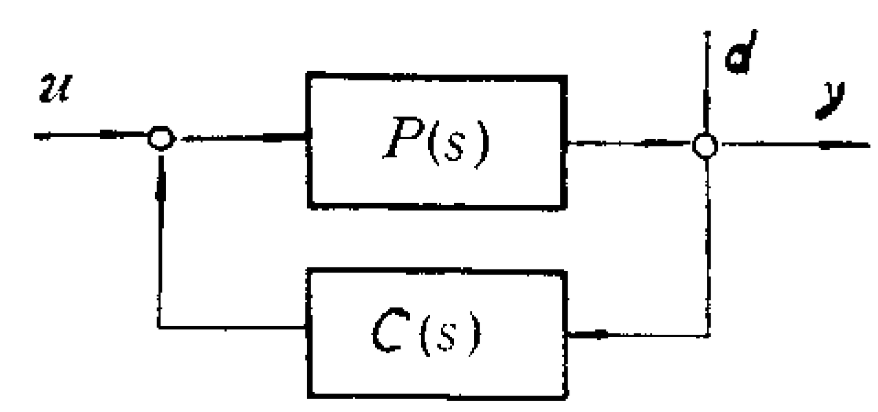

图 1 反馈控制系统框图

$$\|(I+PC)^{-1}\|_\infty=\sup_{D(s)\in H_2}\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|Y(j\omega)|^2d\omega\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|D(j\omega)|^2d\omega\right]^{\frac{1}{2}}}=\sup_{d(t)\in L_2(R)}\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}y^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty}d^2(t)dt\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

上式中，H_2 表示所有有限能量信号的拉氏变换的集合，$L_2(R)$ 为所有有限能量信号的集合. 在文献 [2] 中，Zames 将 $\|W_1(I+PC)^{-1}W_2\|_\infty$ 提为目标函数，其中 W_1, W_2 分别为对输出和输入的加权. 将这一目标函数最小化,就可实现对某一类噪声的最大抑制. 另外,在鲁棒性分析和设计中，H$^\infty$-范数也起着很大的作用. 设(图 1) 所示系统的 $P(s)$ 由于参数扰动等原因变为 $\Delta P(s)+P(s)$，假如 $P(s)$ 与 $\Delta P(s)+P(s)$ 具有相同数目的右半复平面极点数，且 $C(s)$ 使 $P(s)$ 稳定，则只要 $\|\Delta PC(I+PC)^{-1}\|_\infty<1$, $\Delta P(s)+P(s)$ 仍被 $C(s)$ 稳定.

本文于 1989 年 4 月 10 日收到.

以上两例仅从一个侧面反映了$\mathbf{H}^\infty$-范数在系统分析和设计中起着很重要的作用. 在系统分析和设计中,有很多场合需要求出$\mathbf{H}^\infty$-范数,但现有的 $\mathbf{H}^\infty$-范数的求法有限且比较繁琐,尤其是对多输入多输出系统,一般是求出 ω 从 0 至$+\infty$ 之间的 $[\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(P'(-j\omega)P(j\omega)]$值(比如选择一千个点),并选取最大值,才能得到 $\|P(s)\|_\infty$. 文献[3]在这方面做了一些工作,但仅针对单输入单输出的离散系统,文献[5]涉及了一般 MIMO 系统,但并未给出明确求法. 本文的目的之一就是要针对一般的 MIMO 系统, 找出一种简单的求$\mathbf{H}^\infty$-范数的方法. 其次, 是要找出传递函数的 $\mathbf{H}^\infty$-范数与其状态空间实现之间的直接关系. 设系统的传递函数为 $F(s)$, 则 $\|F(s)\|_\infty=\sup\limits_\omega \bar{\sigma}[F(j\omega)]$, 假如 $F(s)$ 为真、有理、稳定的,那么 $F(s)$ 具有状态空间实现 $[A, B, C, D]$, $F(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$. 由于 $F(s)$ 由 $[A,B,C,D]$ 唯一地确定, $\|F\|_\infty$ 与 A, B, C, D 之间必然存在某种联系,但目前已知的关系很间接. 若能找出它们之间的直接关系, 将有可能用状态空间的方法来实现 $\mathbf{H}^\infty$-优化目的,这样或许可能使现有的、相当繁琐的频域优化方法简化.

二、$\mathbf{H}^\infty$-范数与状态空间实现之间的关系

已知一真、有理、稳定的传递函数 $F(s)$, 它的 $\mathbf{H}^\infty$-范数被定义为

$$\|F\|_\infty:=\sup_\omega \bar{\sigma}[F(j\omega)].$$

设 $[A, B, C, D]$ 为 $F(s)$ 的最小状态空间实现,即 $F(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$.

定理 1. 设 $\|F\|_\infty>\bar{\sigma}[D]$,

令

$$A_F=\begin{bmatrix}-A' & -C'C\\ 0 & A\end{bmatrix},\quad B_F=\begin{bmatrix}-C'D\\ B\end{bmatrix},$$

$$C_F=[B'\ \ D'C],\quad D_F=D'D.$$

令 $k_{\max}:=\sup\{k,\ k$ 使 $A_F+B_F(k^2-D_F)^{-1}C_F$ 在虚轴上有特征值$\}$.

则 $k_{\max}=\|F\|_\infty$.

证明. 可以验证, $F'(-s)F(s)=C_F(sI-A_F)^{-1}B_F+D_F$. 由定义

$$\|F\|_\infty=\sup_\omega \bar{\sigma}[F(j\omega)]=\sup_\omega [\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}F'(-j\omega)F(j\omega)],$$

有

1) 如果 $k>\|F\|_\infty$, 则对所有 ω, $\det[k^2I-F'(-j\omega)F(j\omega)]\neq 0$. 如果 $k=\|F\|_\infty$, 则存在某一 ω_0, 使 $\det[k^2-F'(-j\omega_0)F(j\omega_0)]=0$, 所以, $\|F\|_\infty=\sup\{k$, 存在 ω_0 使 $\det[k^2I-F'(-j\omega_0)F(j\omega_0)]=0\}$.

2) 由于 $\|F\|_\infty>\bar{\sigma}[D]$, 所以对于 $k>\|F\|_\infty$, 有 $\det(k^2I-D_F)\neq 0$. 注意到 $D_F=D'D$. 又因为 $\det[k^2I-F'(-j\omega)F(j\omega)]=\det(k^2I-C_F(j\omega I-A_F)^{-1}B_F-D_F)$, 所以 $\det[k^2I-F'(-j\omega)F(j\omega)]=\dfrac{\det(k^2I-D_F)}{\det(j\omega I-A_F)}\det[j\omega I-A_F-B_F(k^2I-D_F)^{-1}C_F]$

以上等式根据

$$\det\begin{bmatrix} k^2I-D_F & C_F \\ B_F & j\omega I-A_F \end{bmatrix} = \det(k^2I-D_F)\cdot\det[j\omega I-A_F-B_F(k^2I-D_F)^{-1}C_F]$$
$$=\det(j\omega I-A_F)\cdot\det[k^2I-D_F-C_F(j\omega I-A_F)^{-1}B_F],$$

因此,使 $\det[k^2-F'(-j\omega)F(j\omega)]$ 在某一 ω_0 为零的最大 k 值等于使 $\det(j\omega I-A_F-B_F(k^2I-D_F)^{-1}C_F]$ 在某一 ω_0 为零的最大 k 值，即使 $A_F+B_F(k^2I-D_F)^{-1}C_F$ 在虚轴上有特征值的最大 k 值.

综合 1), 2), 有

$$\|F\|_\infty=\sup\{k,\ A_F+B_F(k^2-D_F)^{-1}C_F\ \text{在虚轴上有特征值}\}.$$ 证毕.

从 H$^\infty$-范数的定义可知，$\|F\|_\infty\geqslant\bar{\sigma}[D]$，定理 1 给出了 $\|F\|_\infty>\bar{\sigma}[D]$ 时范数的性质,而当 $\|F\|_\infty=\bar{\sigma}[D]$ 时,有

定理 2. 如果 $\|F\|_\infty=\bar{\sigma}[D]$，则对任何 $k>\bar{\sigma}[D]$，$A_F+B_F(k^2-D_F)^{-1}C_F$ 在虚轴上没有特征值.

定理 2 的证明与定理 1 的证明类似,此处略.

推论 1. 如果 $D=0$，可定义

$$k_{\max}:=\sup\left\{k,\ \begin{bmatrix} -A' & -C'C \\ BB'/k^2 & A \end{bmatrix}\text{在虚轴上有特征值}\right\}.$$

则 $k_{\max}=\|F\|_\infty$，这与文献 [4] 的结论相同.

为了得到求 $k_{\max}$ 的一般方法，有必要给出一些关于集合 $\{k, k$ 使 $A_F+B_F(k^2-D_F)^{-1}C_F$ 在虚轴上特征值$\}$的性质,以下用 $\mathrm{set}[k]$ 表示这一集合.

定理 3. 如果 $\|F\|_\infty>\bar{\sigma}[D]$，则 $(\bar{\sigma}[D],\|F\|_\infty]\subseteq\mathrm{set}[k]$.

证明. 因为 $F(s)$ 是真有理、稳定的,所以,当 ω 从 0 到 $+\infty$ 变化时，$\bar{\sigma}[F(j\omega)]$ 为连续的,又因为 $\bar{\sigma}[F(j\infty)]=\bar{\sigma}[D]$，所以对任何 $k\in(\bar{\sigma}[D],\|F\|_\infty]$. $\det[k^2-F'(-j\omega)F(j\omega)]$ 在某一 ω_0 为零,根据定理 1 的证明,这等效于 $A_F+B_F(k^2-D_F)^{-1}C_F$ 在虚轴上至少有两个特征值,因此 $(\bar{\sigma}[D],\|F\|_\infty]\subseteq\mathrm{set}[k]$.

证毕.

三、H$^\infty$-范数的求法

给定一传递函数 $F(s)$ 及其最小实现 $[A,B,C,D]$，由上一节的定理，$\|F\|_\infty$ 可用以下步骤求出:

step1. 取 $k_0=\bar{\sigma}[D]$，$k_1=2k_0$，(若 $D=0$，令 $k_1=1$ 或任意正数)检验 k_1 是否属于 $\mathrm{set}[k]$，若是，则使 k_1 加倍，$2k_1\to k_1$，重复求 step1，否则进行 step2.

step2. 令 $k_2=\dfrac{k_0+k_1}{2}$，如果 $k_2\in\mathrm{set}[k]$，则令 $k_0=k_2$，否则令 $k_1=k_2$. 如果 $|k_0-k_1|>e$，(e 为一预先给定的小正数),则重复 step2，否则停止迭代.

step2 每进行一次，k_0 与 k_1 之间的距离缩小一倍,假设 $|k_0-k_1|$ 的初值为 M,那么

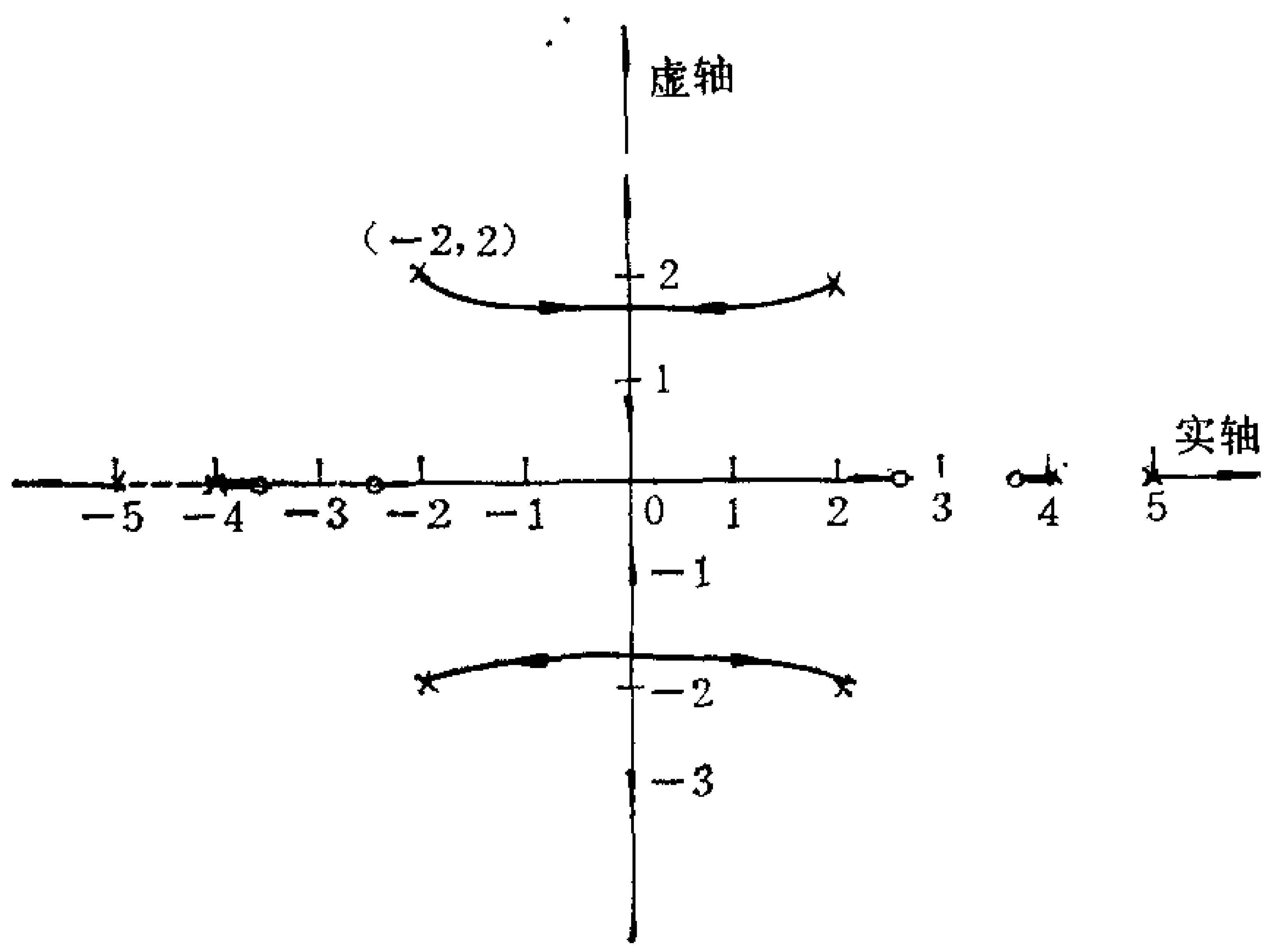

图 2　$\mathbf{H}^\infty$-范数与根轨迹的关系

n 次迭代后 $|k_0-k_1|=M/2^n$. 通过以上迭代，$\|F\|_\infty$ 被确定在 $[k_0, k_1)$ 中.

这种方法同样适用于 $\|F\|_\infty=\bar{\sigma}[D]$ 的情况. 根据定理 2，step2 中的每一个 k_2 都不属于 set$[k]$. 因而每次迭代 k_2 与 $\bar{\sigma}[D]$ 的距离缩小一半.

例. 设 $F(s)$ 的最小状态空间实现 $[A, B, C, D]$ 取值为

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

本例中 $\bar{\sigma}[D]=2$，取 $k_1=4$，经过 14 次迭代可知，$\|F\|_\infty$ 在 2.4601 与 2.4602 之间取值，当 k 从 $+\infty$ 到 $\bar{\sigma}[D]$ 之间变化时，$A_F+B_F(k^2-D_F)^{-1}C_F$ 的特征值轨迹如图 2 所示.

四、结　束　语

本文指出，$\|F\|_\infty$ 等于使 $A_F+B_F(k^2-D_F)^{-1}C_F$ 在虚轴上有特征值的最大 k. 其中 $[A_F, B_F, C_F, D_F]$ 为 $F'(-s)F(s)$ 的最小状态空间实现. 这一结论提供了一种求 $\mathbf{H}^\infty$-范数的简单方法. 与文献 [1—4] 相比，本文的结论更具一般性和实用性；与逐点法相比，本文方法的精度能得到保证，且减少了求特征值的次数，更重要的是，本文揭示了 $\mathbf{H}^\infty$-范数与状态空间实现的关系.

参　考　文　献

[1] Douglas, R. G, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, New York, Academic, 1972.

[2] Zames, G., Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transfermations, Multivariable Seminorms and Approximate Inverse, *IEEE Trans. Auto. Contr.* **AC-23**(1981), 301—320.

[3] Guo, L., Xia, L. G. and Liu, Y., Recursive Algorithm for Computation of the H^∞-norm of Polynomials, *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **AC-33**(1988), 1154—1157.

[4] Boyd, S., Balakrishnon, V. and Kabamba, P., Or Computing the H^∞-norm of a Fransfer Matrix, *Math. Control, Signals and Systems,* (1989), No.2.

[5] Robel, G., On Computing the Infinity Norm, *IEEE Trans. Auto. Contr.* **AC-34**(1989), 882—884.

RELATION BETWEEN THE H^∞-NORM OF A TRANSFER MATRIX AND ITS STATE-SPACE REPRESENTATION

ZHANG ZHONGJUN　SHI SONGJIAO　HU TINGSHU
(Shanghai Jiao Tong University)

ABSTRACT

Relation between the H^∞-norm of a transfer matrix and its state-space representation is investigated in this paper. Using this relation, a simple method to calculate the H^∞-norm of a transfer matrix is presented.

Key words: H^∞-control; H^∞-norm; state-space representation; eigenvalue.