

σ 校正混合自适应控制律

李言俊 张安华 陈新海

(西北工业大学航天工程学院,西安)

摘 要

本文提出了一种 σ 校正混合自适应控制律,并且证明在对象具有相加和相乘未建模动态(unmodeled dynamics)的情况下,若采用文中所给出的混合自适应控制系统结构,这种 σ 校正混合自适应控制律可保证闭环系统中的所有信号有界,并且对于任何有界初始条件,系统具有小的均值残余跟踪误差.数学模拟结果表明,本文所提出的混合自适应控制律优于相类似的全连续和全离散自适应控制律.

关键词: σ 校正,混合自适应控制,未建模动态,系统跟踪误差.

一、引 言

σ 校正法是 Ioannou 提出的一种构成稳定自适应控制律的有效方法,曾被 Ioannou 等人成功地应用于连续时间自适应控制器设计^[1]. 本文将 σ 校正应用于混合自适应控制,提出一种适用于连续时间对象具有未建模动态情况的 σ 校正混合自适应控制律.文中证明,若采用本文所给出的混合自适应控制系统结构,并且对象的未建模动态在低频范围内足够小,则这种 σ 校正混合自适应控制律可保证闭环系统中的所有信号有界,并且具有小的均值残余跟踪误差.

二、对象模型及控制目的

考虑单输入单输出对象

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = G_0(s)[1 + \mu\Delta_2(s)] + \mu\Delta_1(s), \quad (2.1)$$

式中 $G_0(s) = K_p Z_0(s)/R_0(s)$ 是对象已建模部分的传递函数. $G(s)$ 是严格真的, $\mu\Delta_1(s)$ 和 $\mu\Delta_2(s)$ 分别是对象的相加和相乘未建模动态,正标量参数 μ 表示其变化率. $Z_0(s)$ 是首一 m 阶 Hurwitz 多项式, $R_0(s)$ 是首一 n 阶多项式, $n > m$, $K_p > 0$. 对于对象的未建模动态,假定: (i) $\Delta_1(s)$ 是严格真稳定传递函数; (ii) $\Delta_2(s)$ 是稳定传递函数; (iii) 使 $\Delta_1(s-p)$ 和 $\Delta_2(s-p)$ 的极点稳定的稳定余度 $p > 0$ 的下界 p_0 是已知的.

从上述假设可以看出,小的 μ 值保证了 $|\mu\Delta_2(j\omega)|$ 在低频范围内是小的,但是,因为当 $n^* = n - m \geq 2$ 时 $\Delta_2(s)$ 允许是非真的,则在高频处, $|\mu\Delta_2(j\omega)|$ 可能很大,也就是说,尽管 μ 非常小,若 $|\omega| \rightarrow \infty$, 则 $|\mu\Delta_2(j\omega)| \rightarrow \infty$.

要求对象的输出 $y(t)$ 跟踪参考模型

$$y_m(s) = W_m(s)r(s) = K_m \frac{1}{D_m(s)} r(s) \quad (2.2)$$

的输出 $y_m(t)$, 式中 $D_m(s)$ 是首一 n^* 阶 Hurwitz 多项式, $r(t)$ 是一致有界参考输入信号.

控制目的是利用所设计的混合自适应控制器,使得对于某一 $\mu^* > 0$ 和任意的 $\mu \in [0, \mu^*]$ 以及 $\Delta_1(s), \Delta_2(s)$ 满足假设 (i)–(iii) 的任何可能干扰,最终的闭环系统是稳定的,并且对象输出 $y(t)$ 尽可能紧密地跟踪参考模型输出 $y_m(t)$.

三、混合自适应系统误差模型

参考文献[2],利用对象的输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 产生 $(n-1)$ 维辅助向量 ω_1, ω_2 及 $(2n-1)$ 维辅助向量 ω

$$\dot{\omega}_1 = F\omega_1 + qu, \quad \dot{\omega}_2 = F\omega_2 + qy, \quad \omega^T = [\omega_1^T, \omega_2^T, y], \quad (3.1)$$

式中 F 为 $(n-1) \times (n-1)$ 稳定矩阵, (F, q) 为可控对.

取对象的控制输入形式为

$$u(t) = \theta_k^T \omega(t) + c_k r(t), \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.2)$$

式中 k 表示时刻 t_k , $\theta_k^T = [\theta_{1k}^T, \theta_{2k}^T, \theta_{3k}]$ 是 $(2n-1)$ 维控制参数向量, c_k 是标量前馈增益. 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 上, θ_k 和 c_k 皆为常数,参数 θ_k 和 c_k 仅仅在离散时刻 $t_k (k \in \mathbf{N})$ 进行调整. \mathbf{N} 表示正整数集.

为简化叙述,现假定 $K_p = K_m = 1$, 可以证明,系统的跟踪误差 $e_1(t) \triangleq y(t) - y_m(t)$ 为

$$e_1 = W_m(s)\phi_k^T \omega + \mu\Delta(s)u, \quad (3.3)$$

式中 $\phi_k = \theta_k - \theta^*$, $\theta^{*T} = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^*]$ 为理想控制参数向量,

$$\Delta(s) = \Delta_1(s) + W_m(s)F_2(s)\Delta_1(s) + W_m(s)\Delta_2(s)[1 - F_1(s)],$$

$$F_1(s) = \theta_1^{*T}(sI - F)^{-1}q, \quad F_2(s) = \theta_3^* + \theta_2^{*T}(sI - F)^{-1}q.$$

引入辅助信号 $y_a(t)$

$$y_a = -\theta_k^T W_m(s)\omega + W_m(s)\theta_k^T \omega, \quad (3.4)$$

并且令 $\zeta = W_m(s)\omega$, $\eta = \Delta(s)u$, 则增广误差

$$\varepsilon_1(t) \triangleq e_1(t) - y_a(t) = \phi_k^T \zeta(t) + \mu\eta(t). \quad (3.5)$$

四、 σ 校正混合自适应控制律

由 (3.5) 式可得

$$E(t) = \phi_k^T Z(t) + \mu\eta(t)/m(t), \quad (4.1)$$

式中 $E(t) = \varepsilon_1(t)/m(t)$, $Z(t) = \zeta(t)/m(t)$, $m(t)$ 称之为规范信号, 它满足微分方程

$$\dot{m}(t) = -\delta_0 m(t) + \delta_1(|u(t)| + |y(t)| + 1), \quad m(0) \geq \delta_1/\delta_0, \quad (4.2)$$

式中 δ_0 和 δ_1 是正的设计常数, 选择 δ_0 满足不等式

$$\delta_0 + \delta_2 \leq \min[p_0, q_0], \quad \delta_2 \in \mathbf{R}^+. \quad (4.3)$$

式中 $q_0 > 0$ 是使 $W_m(s - q_0)$ 的极点和 $F + q_0 I$ 的特征值稳定的一个常数, p_0 的定义已在假设 (iii) 中给出.

可以证明, 对于 $\forall t \geq t_0 > 0$, $E(t)$, $Z(t)$, $|\eta(t)|/m(t)$, $\|\omega(t)\|/m(t)$, $|u(t)|/m(t)$, $|y(t)|/m(t)$ 都是有界的.

定义集合 Ω_1 和 Ω_2 为

$$\Omega_1 \triangleq \{t \mid |\varepsilon(t)| \leq \nu_0\}, \quad \Omega_2 \triangleq \{t \mid |\varepsilon(t)| > \nu_0\}, \quad (4.4)$$

式中 $\nu_0 > 0$ 为设计常数, 选择其满足不等式

$$2\mu|\eta(t)|/m(t) \leq \nu_0 \leq \mu\rho_0, \quad \rho_0 \in \mathbf{R}^+. \quad (4.5)$$

为实现系统的自适应控制, 现采用下述 σ 校正混合自适应控制律离散地获得控制参数估值 θ_k :

$$\theta_{k+1} = (1 - \sigma)\theta_k - \frac{\Gamma a}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau)Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau)Z(\tau)} d\tau, \quad (4.6a)$$

$$\sigma = \begin{cases} 0 & , \text{ 若 } \|\theta_k\| < M_0, \\ \sigma_0 \left(\frac{\|\theta_k\|}{M_0} - 1 \right) & , \text{ 若 } M_0 \leq \|\theta_k\| \leq 2M_0, \\ \sigma_0 & , \text{ 若 } \|\theta_k\| > 2M_0, \end{cases} \quad (4.6b)$$

$$\Gamma = \begin{cases} 0, & \text{ 若 } t \in \Omega_1, \\ 1, & \text{ 若 } t \in \Omega_2. \end{cases} \quad (4.6c)$$

式中 $T_k = t_{k+1} - t_k$, σ_0 , M_0 , a 为正的设计常数, 取 $M_0 \geq 2\|\theta^*\|$, $\|\cdot\|$ 表示欧几里德范数, $\sigma_0 \leq 1/4$.

五、闭环系统稳定性分析

整个混合自适应闭环系统的稳定性分析, 可以归结为下述定理的证明.

定理. 存在一 $\mu^* > 0$, 对于 $\forall \mu \in [0, \mu^*]$ 和任何有界初始条件, 由方程 (2.1) — (4.6) 所构成的混合自适应闭环系统中的所有信号有界, 并且系统的跟踪误差 $e_1(t)$ 属于残差集

$$D_\varepsilon = \left\{ e_1: \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{T > 0} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |e_1(t)| dt \leq \mu\gamma_1 + \bar{\varepsilon}, \quad t_1 \geq 0 \right\}, \quad (5.1)$$

式中 $\gamma_1 \in \mathbf{R}^+$, \mathbf{R}^+ 为有界正实数集, $\bar{\varepsilon}$ 为一小的正常数.

证明. (4.6a) 式又可写成

$$\phi_{k+1} = \phi_k - \sigma\theta_k - \frac{\Gamma a}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau)Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau)Z(\tau)} d\tau. \quad (5.2)$$

令 $V_k = \phi_k^T \phi_k$, 则

$$\begin{aligned} \Delta V_k = V_{k+1} - V_k = & -2\sigma \phi_k^T \theta_k + \sigma^2 (\theta^* + \phi_k)^T \theta_k \\ & - \frac{2\Gamma a}{T_k} \phi_k^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau + \frac{2\Gamma \sigma a}{T_k} (\theta^* + \phi_k)^T \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \\ & + \frac{\Gamma^2 a^2}{T_k^2} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \right]^T \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varepsilon(\tau) Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

取 $\sigma \leq \frac{1}{4}$, $M_0 \geq 2\|\theta^*\|$, 当 $\|\theta_k\| \geq M_0$ 时, 则 $\|\phi_k\| \geq \|\theta^*\|$, 并且

$$\begin{aligned} \Delta V_k \leq & -\frac{3}{2} \sigma \phi_k^T \theta_k - \frac{\Gamma a}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{[\phi_k^T Z(\tau) + \mu \eta(\tau)/m(\tau)] Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \\ & + \frac{\Gamma^2 a^2}{T_k^2} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{[\phi_k^T Z(\tau) + \mu \eta(\tau)/m(\tau)] Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \right]^T \\ & \times \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{[\phi_k^T Z(\tau) + \mu \eta(\tau)/m(\tau)] Z(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

令 $\phi_k^T \eta^*(t) = \eta(t)$, 则有

$$\Delta V_k \leq -\frac{3}{2} \sigma \phi_k^T \theta_k - \phi_k^T [I - R_k] R_k^T \phi_k, \quad (5.5)$$

式中 $R_k = \frac{\Gamma a}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{[Z(\tau) + \mu \eta^*(\tau)/m(\tau)] Z^T(\tau)}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau$.

由于 $\sigma \phi_k^T \theta_k \geq 0$, 若选取 $|2\mu \eta(t)| \leq v_0 \leq \mu \rho_0$, $a \leq \frac{1}{2}$, 则有 $0 \leq R_k < I$, 因而

$\Delta V_k \leq 0$, 这就意味着 ϕ_k 和 θ_k 有界, 并且当 $\|\theta_k\| \geq M_0$ 时, $\|\phi_k\|$ 逐渐减小.

当 $\|\phi_k\|$ 减小到使 $\|\theta_k\| < M_0$ 时, $\sigma = 0$, 则有

$$\Delta V_k \leq -\phi_k^T R_k^T \phi_k \leq 0. \quad (5.6)$$

利用 (5.5) 式, (5.6) 式可得

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \phi_k^T R_k^T \phi_k \leq \sum_{k=k_0}^{k_0+N} \left(\frac{3}{2} \sigma \phi_k^T \theta_k \right) + V_{\infty} - V_{k_0}, \quad (5.7)$$

式中 $k_0 > 0$, N 为有限正整数. (5.7) 式又可写为

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \phi_k^T R_k^T \phi_k < \infty, \quad (5.8)$$

这就意味着

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{T_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\phi_k^T [Z(\tau) + \mu \eta^*(\tau)/m(\tau)] Z^T(\tau) \phi_k}{1 + Z^T(\tau) Z(\tau)} d\tau = 0 \quad (5.9)$$

以及

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\phi_k^T \zeta(\tau))^2}{m^2(\tau)} d\tau \leq \mu g_2 (t_{k+1} - t_k), \quad (5.10)$$

式中 $g_2 \in \mathbf{R}^+$.

证明的其余部分与文献[4]中的稳定性证明相类似.

由 (5.4) 式或 (5.5) 式可以看出, 在混合自适应控制律 (4.6) 中也可以不用死区法 (4.6c) 式, 即令 $v_0 = 0$. 在这种情况下, 当 $\|\phi_k\|$ 较大时, $\Delta V_k < 0$, 控制律使 $\|\phi_k\|$ 逐渐减小. 当 $\|\phi_k\|$ 减小到一定程度时, $\|\phi_k\|$ 又开始增大, 而当 $\|\phi_k\|$ 增大到一定程度时又开始减小. 由于系统存在未建模动态干扰, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|\phi_k\|$ 将在一个很小的

范围内变动。这就是说,对于任何有界初始条件 θ_0 , ϕ_k 和 θ_k 都是有界的。

对于设计常数 σ_0 , μ_0 和 a , 为了进行数学证明,文中给出了极为保守的选择范围。在实际工程问题中,这些参数的选择是相当灵活的,也是容易选择的。当然,这些设计常数选择得合适与否将关系到系统暂态品质的优劣,对于具体问题可通过数字仿真合理选择这些设计常数。

六、数字仿真结果

为了验证文中理论的正确性,本文进行了全面数字仿真。仿真分理论验证和工程应用两部分。在进行理论验证数字仿真时,所选取的控制对象为

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(s-1)} (1 - \mu s). \quad (6.1)$$

参考模型为

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}. \quad (6.2)$$

所取参数为 $F = -1$, $q = 1$, $\delta_0 = 0.7$, $\delta_1 = 1$, $m(0) = 2$, $\mu = 0.02$. 图 1 示出了 $\theta_0^T = [-1, 1, -2.5]$, $r(t) = 10 \sin 0.5t + 5 \sin 0.2t$ 时的系统跟踪误差曲线。可以验证, $\theta_0^T = [-1, 1, -2.5]$ 使闭环系统处于不稳定初始状态。数字仿真结果表明,在对象具有未建模动态情况下,本文中的 σ 校正混合自适应控制律使闭环系统具有鲁棒稳定性。

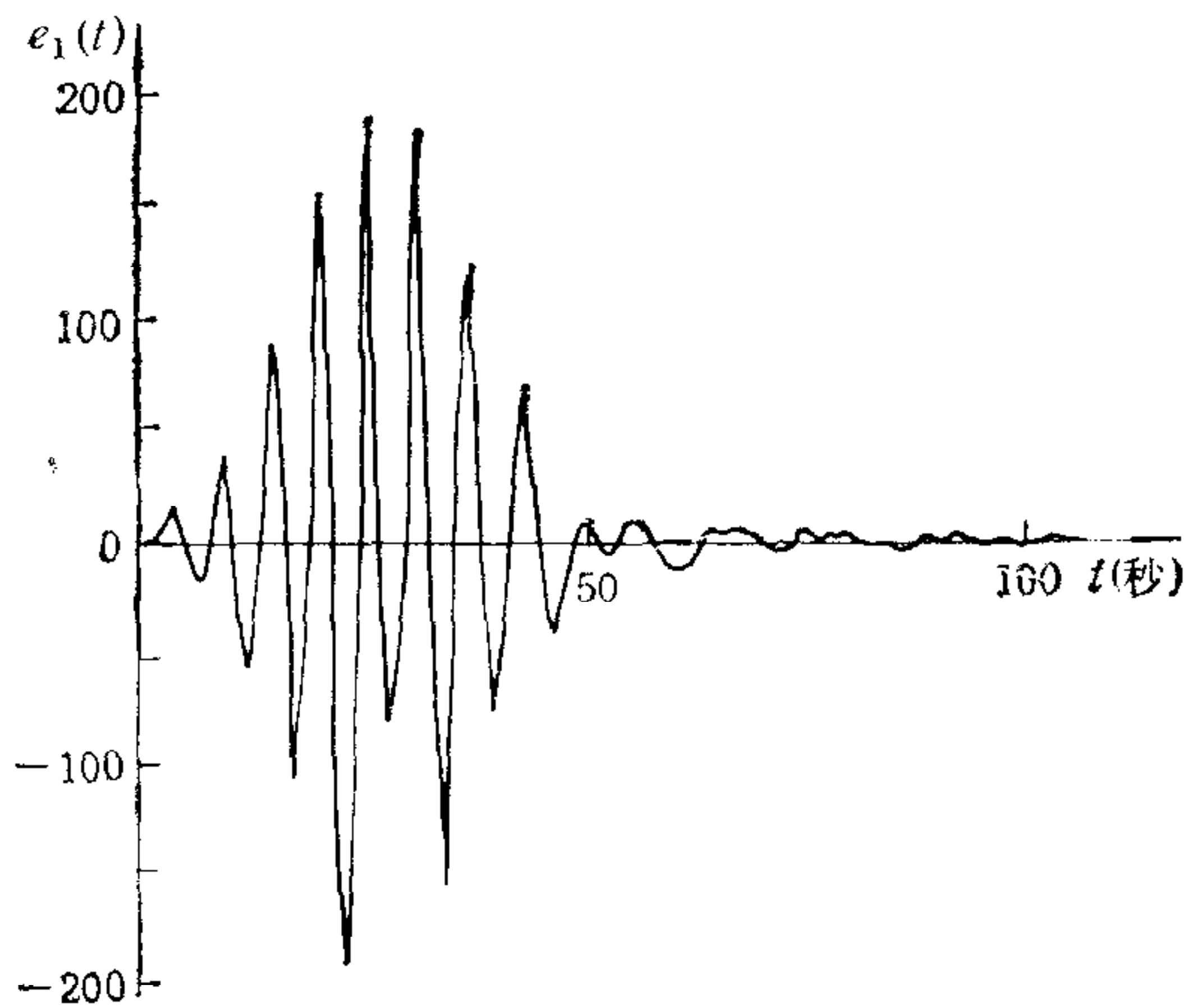
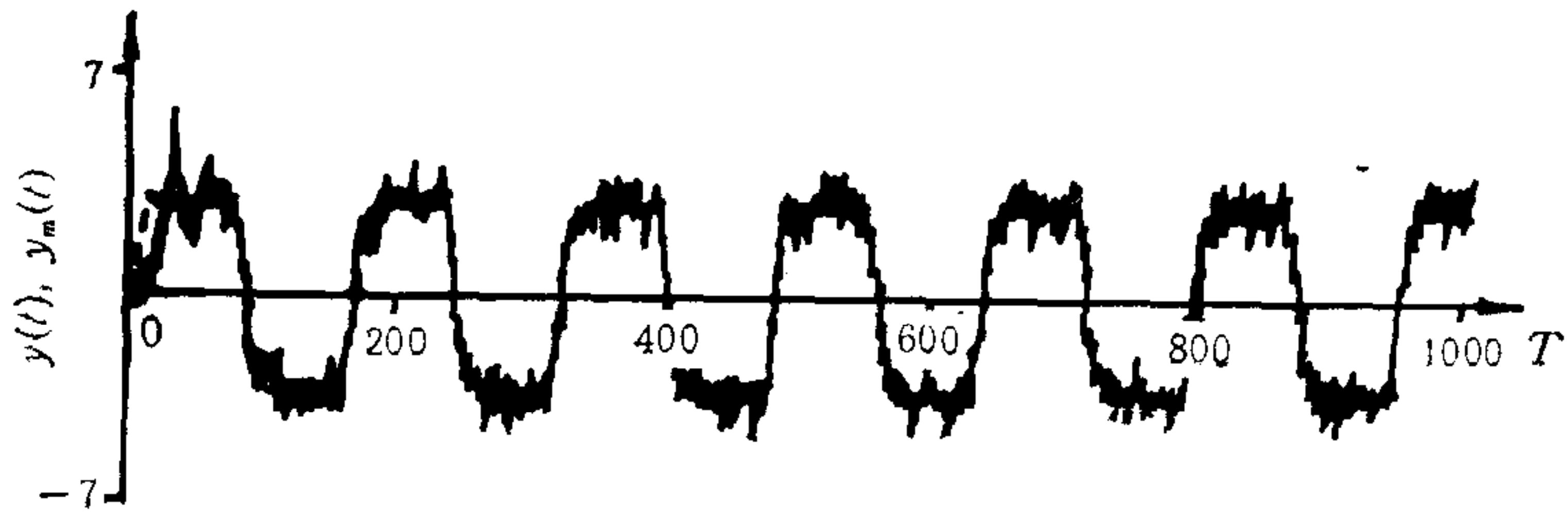


图 1 理论验证系统跟踪误差曲线

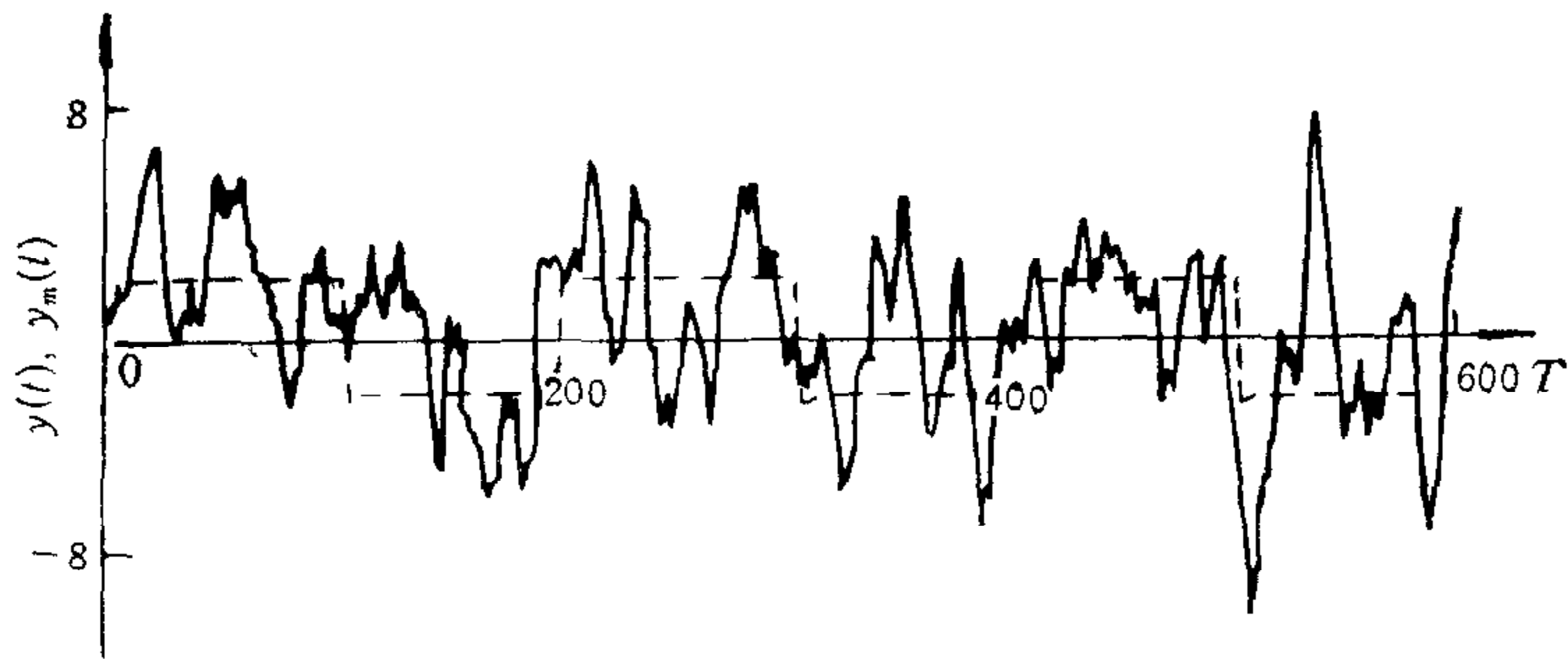
干扰影响,具有良好的跟踪性能。

关于这种混合自适应控制律优于相类似的全连续或全离散自适应控制律的理论分析,受篇幅限制,此处不可能作详尽阐述,但其基本原理可简单归纳为: 1) 在对象含有高频寄生时,混合自适应控制律与全连续自适应控制律相比,有利于消除系统非线性影响; 2) 由于 σ 校正混合自适应控制律在估计参数时采用的是有关信号在小时间区间内的积分平均值,减小了这些信号中的零均值随机干扰的影响,而 σ 项的引入,加快了系统的调

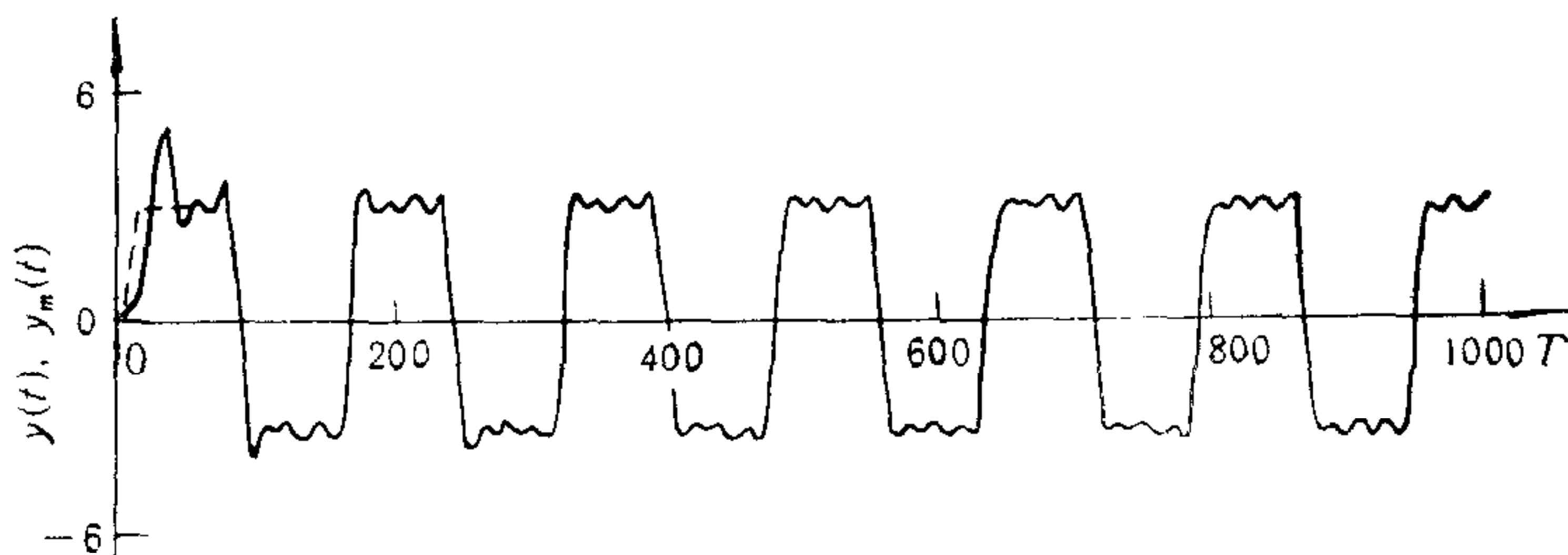
为了探讨文中理论在实际工程中应用的可能性,笔者选择了地空导弹自动驾驶仪这一典型快速时变系统进行了数字仿真,并与相类似的全连续和全离散系统进行了对比。图 2 是将导弹自动驾驶仪参数冻结在某一弹道特征点上,加入均值为零、方差为 0.5 随机干扰时的数字仿真曲线,图中虚线为参考模型输出,实线为自适应自动驾驶仪输出。可以看到,在这种情况下,全连续系统的跟踪性能变差,全离散系统根本无法跟踪参考模型,而混合自适应系统几乎不受



(a) 全连续自适应控制系统



(b) 全离散自适应控制系统



(c) 混合自适应控制系统

图 2 地空导弹自适应自动驾驶仪仿真曲线

整速度; 3) 混合自适应控制律是在对象仍保持连续本质状态下导出的, 它比离散控制律能够与实际对象紧密耦合。

七、结 束 语

本文提出了一种新的 σ 校正混合自适应控制律, 并且证明了用这种自适应控制律构成的混合自适应闭环系统具有鲁棒稳定性。数字仿真结果表明, 这种混合自适应控制方案对参考模型的跟踪性能优于相类似的全连续和全离散方案。因而混合自适应控制是一种值得进一步深入广泛研究的有效控制方法。

参 考 文 献

- [1] Ioannou, P. and Tsakalis, K., A Robust Adaptive Controller, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-31**(1986), 1133—1143.
- [2] Narendra, K. S. and Valvani, L. S., Stable Adaptive Controller Design—Direct Control, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-23**(1978), 570—583.
- [3] Narendra, K. S., Khalifa, I. H. and Annaswamy, A. M., Error Model for Stable Hybrid Adaptive systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-30**(1985), 339—347.
- [4] 李言俊, 连续对象具有未建模动态时的一种鲁棒混合自适应控制器, 西北工业大学学报, **7**(1989), **1**, 57—66.

 σ -MODIFICATION HYBRID ADAPTIVE CONTROL LAW

Li Yanjun Zhang Anhua Chen Xinhai

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University)

ABSTRACT

This paper proposes a σ -modification hybrid adaptive control law. It is shown that for a continuous-time plant with additive and multiplicative unmodeled dynamics if the hybrid adaptive control system configuration given in the paper is adopted, the hybrid adaptive control law guarantees boundedness of all signals in the adaptive loop and small residual tracking errors for any bounded initial condition. The simulation results demonstrate that the hybrid adaptive control law is superior to the pure discrete-and continuous-time counterparts.

Key words: σ -modification; hybrid adaptive control; unmodeled dynamics; system tracking error.