一般信息结构下的 Robust 控制器

胡 仰 曾
(华东化工学院自动化研究所,上海)

摘 要

本文在文献[1, 2, 3]的基础上,直接给出了一般信息结构(GIS)下,系统的一类 Robust 控制器的结构、存在条件和设计方法,避免了用间接方法[4]的要增加输出向量维数和使观测矩阵降秩的不足之处. 推广了文献[1]和[2]的集中和块对角分散信息结构下的有关结论. 若所讨论的 GIS 是经济信息结构[5,6,7,8],则该 GIS 下的 Robust 控制器即为经济 Robust 控制器. 最后举例说明本文方法的应用.

关键词: 信息结构,大系统, Robust 控制.

一、引 言

工程实践往往要求在给定的既非集中又非块对角的所谓一般信息结构(GIS)下设计系统的 Robust 控制器. GIS 下的 Robust 控制器是这样的一种控制器,除了要求闭环系统渐近稳定、渐近跟踪参考输入及具有 Robust 性外,再加上约束: 控制器的结构(IS)服从给定的 GIS.

文献[4]对给定的 GIS 下的 Robust 控制问题提出了一个间接的方法:首先把该 IS 转换成块对角形,然后应用现有的块对角形 IS 下的 Robust 控制方法予以解决. 除了要对 IS 进行形式上的变换外,其不足之处是要增加输出向量的维数和使观测矩阵降秩.

本文中未加定义的术语和记号可见文献[3, 7, 9].

设有线性定常多变量系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)+E\boldsymbol{w}(t),\ \boldsymbol{y}(t)=C\boldsymbol{x}(t)+F\boldsymbol{w}(t) \tag{1}$$

及 GIS K^*,其中状态 $\boldsymbol{x}\in R^n$,输入 $\boldsymbol{u}\in R^r$,可量测的输出 $\boldsymbol{y}\in R^m$,不可量测的干扰 $\boldsymbol{w}\in R^{\Omega}$. 设干扰 $\boldsymbol{w}(t)$ 满足方程

$$\dot{\boldsymbol{z}}_1(t)=\mathscr{A}_1\boldsymbol{z}_1(t),\ \boldsymbol{w}(t)=\mathscr{C}_1\boldsymbol{z}_1(t), \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{z}_1\in R^{n_1}$; $(\mathscr{C}_1, \mathscr{A}_1)$ 为完全能观阵偶; $A, B, E, C, F, \mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{A}_1$ 为具有相应维数的实矩阵. 不失一般性,设 $\operatorname{rank} B=r$, $\operatorname{rank} C=m$, $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E\\F\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\mathscr{C}_1=\Omega$, $\operatorname{Ch}(\mathscr{A}_1)\subset C^+$(右闭半复平面). 设参考输入 $\boldsymbol{y}^r(t)\in R^m$,满足方程

$$\dot{\boldsymbol{z}}_2(t)=\mathscr{A}_2\boldsymbol{z}_2(t),\ \boldsymbol{\sigma}(t)=\mathscr{C}_2\boldsymbol{z}_2(t),\ \boldsymbol{y}^r(t)=G\boldsymbol{\sigma}(t), \tag{3}$$

本文于 1989 年 1 月 25 日收到.

其中 $z_2 \in R^{n_2}$，$(\mathscr{C}_2, \mathscr{A}_2)$ 为完全能观阵偶，$\mathscr{A}_2$, $\mathscr{C}_2$, G 为具有相应维数的实矩阵，$\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} \mathscr{C}_2 = \dim \boldsymbol{\sigma}$，$\operatorname{Ch}(\mathscr{A}_2) \subset C^+$.

定义 1. 若系统 (1) 的控制器满足条件：1) 控制器的信息结构服从给定的 K^*; 2) 闭环系统渐近稳定; 3) 渐近输出调节，即 $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}^r(t)$; 4) 控制器具有 Robust 性[2]. 则称该控制器为 GISK^* 下系统 (1) 对扰动 $\boldsymbol{w}(t)$ 和参考输入 $\boldsymbol{y}^r(t)$ 的 Robust 控制器，简称 K^* 下系统 (1) 的 Robust 控制器.

本文应用文献[3]的结果，研究给定的 GIS K^* 下系统(1)对分别具有模式 (2) 和(3) 的干扰和参考输入的一类 Robust 控制器的结构、存在条件及设计方法. 不采用首先作 IS 形式上的变换的间接方法，直接给出了有关的结果，从而简化了设计，推广了已有的集中和块对角分散 IS 下的 Robust 控制器存在的充分必要条件.

二、若 干 引 理

引理 1. 若复数 $\lambda \bar{\in} FM\left(\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & \lambda I_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; [K^* \ \ K^*]\right)$，则

1) 存在 $K \in R(K^*)$，使 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_n & BK \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m$;

2) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m$, $\operatorname{rank} B \geqslant m$, $r \geqslant m$;

3) $\operatorname{rank} K^* = m$.

证. i) 由引理条件，存在 $\bar{K}$, $K \in R(K^*)$，有

$$\lambda \bar{\in} \operatorname{Ch}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & \lambda I_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}[\bar{K} \ \ K]\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\right) = \operatorname{Ch}\left(\begin{bmatrix} A+B\bar{K}C & BK \\ C & \lambda I_m \end{bmatrix}\right),$$

所以 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_n + B\bar{K}C & BK \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m$. 因为

$$\begin{bmatrix} A-\lambda I_n + B\bar{K}C & BK \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B\bar{K} \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A-\lambda I_n & BK \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

所以 1) 成立.

ii) 从结论 1) 及 $\begin{bmatrix} A-\lambda I_n & BK \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-\lambda I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & \\ & K \end{bmatrix}$ 知，结论 2) 成立.

iii) 由条件 1，并注意到 $K \in R(K^*)$ 及结构矩阵秩的定义，可知结论 3) 成立.

引理 2[3]. 系统 (C, A, B) 在 GIS K^* 下可被镇定，当且仅当

$$FM^{us}(C, A, B; K^*) = \phi \text{ (空集)}.$$

引理 3[7].

$$FM(C, A, B; K^*) = \bigcap_{(\bar{C}, A, \bar{B}, \bar{K}^*) \in N.N.\mathrm{Sub}.(C, A, B, K^*)} TZ(\bar{C}, A, \bar{B}) \cap \operatorname{Ch}(A).$$

三、主要结论

设 $d(\lambda)$ 为 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$ 的最小多项式的最小公倍式

$$d(\lambda)=\lambda^q+\delta_q\lambda^{q-1}+\cdots+\delta_2\lambda+\delta_1=\prod_{j=1}^{q}(\lambda-\lambda_j).$$

令 $P\triangleq\{\lambda_1,\cdots,\lambda_q\}$，$\mathscr{C}\triangleq\begin{bmatrix}0 & & \\ \vdots & & I_{q-1} \\ 0 & & \\ -\delta_1 & -\delta_2\cdots & -\delta_q\end{bmatrix}$，$\mathscr{B}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}_{q\times 1}$，

$$\Lambda_1=\text{block diag }(\underbrace{\mathscr{B},\cdots,\mathscr{B}}_{m\text{ 个}}),\ \Lambda_2=\text{block diag }(\underbrace{\mathscr{C},\cdots,\mathscr{C}}_{m\text{ 个}}),$$

设 $K^*=[\bar{K}_1^*,\cdots,\bar{K}_m^*]$，其中 $\bar{K}_i^*$ 为 K^* 的第 i 列. 记

$$\bar{\bar{K}}^*\triangleq[\underbrace{\bar{K}_1^*,\cdots,\bar{K}_1^*}_{q\text{ 个}},\ \underbrace{\bar{K}_2^*,\cdots,\bar{K}_2^*}_{q\text{ 个}};\ \underbrace{\bar{K}_m^*,\cdots,\bar{K}_m^*}_{q\text{ 个}}].$$

本文限于研究具有这样结构的系统 (1) 的 Robust 控制器，它由如下两部分组成:

(i) 伺服补偿器

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)=\Lambda_2\boldsymbol{\eta}(t)+\Lambda_1(\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}^r(t)). \tag{4}$$

(ii) 镇定补偿器

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=S\boldsymbol{\xi}(t)+R_1\boldsymbol{y}(t)+R_2\boldsymbol{\eta}(t),\ \boldsymbol{u}(t)=Q\boldsymbol{\xi}(t)+K_1\boldsymbol{y}(t)+K_2\boldsymbol{\eta}(t), \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}\in R^{mq}$, $\boldsymbol{\xi}\in R^{\bar{n}}$, $\bar{n}=\sum\limits_{i=1}^{r}\bar{n}_i$，$\bar{n}_i$ 为非负整数，$i=1,2,\cdots,r$. $K_1\in R(K^*)$，$K_2\in R(\bar{\bar{K}}^*)$，$R_1\in R(R_1^*)$，$R_1^*\overbrace{(\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_r)}K^*$，$R_2\in R(R_2^*)$，$R_2^*\overbrace{(\bar{n}_1,\cdots,\bar{n}_r)}\bar{\bar{K}}^*$，$Q=\text{block diag}(Q_1,\cdots,Q_r)$，$Q_i\in R^{1\times\bar{n}_i}$，$S=\text{block diag}(S_1,\cdots,S_r)$, $S_i\in R^{\bar{n}_i\times\bar{n}_i}$.

镇定补偿器是 $K_g^*\triangleq[K^*\vdots\bar{\bar{K}}^*]$ 下的输出反馈控制器，用以镇定由系统 (1) 和伺服补偿器 (4) 所组成的增广系统 ($\boldsymbol{y}^r(t)$ 取 0)

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ \Lambda_1C & \Lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\eta}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t),\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{y}(t)\\ \boldsymbol{\eta}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{\eta}(t)\end{bmatrix}. \tag{6}$$

补偿器 (4) 和 (5) 一起组成了系统 (1) 的输出反馈控制器

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\eta}}(t)=\Lambda_2\boldsymbol{\eta}(t)+\Lambda_1(\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}^r(t)),\\ \dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=S\boldsymbol{\xi}(t)+R_1\boldsymbol{y}(t)+R_2\boldsymbol{\eta}(t),\\ \boldsymbol{u}(t)=Q\boldsymbol{\xi}(t)+K_1\boldsymbol{y}(t)+K_2\boldsymbol{\eta}(t).\end{cases} \tag{7}$$

显然，控制器 (7) 的信息结构服从 K^*.

定理 1. 给定系统 (1) 及其 GIS K^*，则对具有模式 (2) 的扰动 $\boldsymbol{w}(t)$ 和具有模式 (3) 的参考输入 $\boldsymbol{y}^r(t)$，存在具有结构 (7) 的 GIS K^* 下的 Robust 控制器，当且仅当

1) $\lambda\bar{\in}FM(C,A,B;K^*)$，$\forall\lambda\in\text{Ch}^{us}(A)$ 及 $\lambda\bar{\in}P$， (8)

2) $\lambda\bar{\in}FM\left(\begin{bmatrix}C & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix},\begin{bmatrix}A & 0\\ C & \lambda I\end{bmatrix},\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix};\ [K^*\ K^*]\right)$，$\forall\lambda\in P$. (9)

证明(限于篇幅，仅作概梗的证明).

必要性．设存在具有结构(7)的 Robust 控制器，于是增广系统(6)在 $IS[K^* \vdots \bar{\bar{K}}^*]$ 下可被镇定．由引理 2

$$FM^{us}\left(\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ \Lambda_1 C & \Lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, [K^* \vdots \bar{\bar{K}}^*]\right) = \phi, \tag{10}$$

于是对任意 $\lambda \in \mathrm{Ch}^{us}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ \Lambda_1 C & \Lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ch}^{us}(A) \cup \mathrm{Ch}(\Lambda_2) = \mathrm{Ch}^{us}(A) \cup P$，存在 $\bar{K} \in R(K^*)$，$\bar{\bar{K}} \in R(\bar{\bar{K}}^*)$，有

$$\det\begin{bmatrix} A - \lambda I_n + B\bar{K}C & B\bar{\bar{K}} \\ \Lambda_1 C & \Lambda_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

接着可证

(i) 当此 $\lambda \in \mathrm{Ch}^{us}(A)$，但 $\lambda \bar{\in} P$ 时，(8)式成立；

(ii) 当此 $\lambda \in P$ 时，(9)式成立．

充分性．设(8)式和(9)式成立．首先证明对任意

$$\lambda \in \mathrm{ch}^{us}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ \Lambda_1 C & \Lambda_2 \end{bmatrix}\right),\ \lambda \bar{\in} FM\left(\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ \Lambda_1 C & \Lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, [K^* \ \bar{\bar{K}}^*]\right).$$

于是(10)式成立．由引理 2，存在 $[K^* \ \bar{\bar{K}}^*]$ 下的输出反馈控制器(5)，使增广系统(6)和该控制器所组成的闭环系统渐近稳定，从而系统(1)和控制器(7)所组成的闭环系统渐近稳定．同文献[1]的有关证明类似，接着可证该闭环系统对具有模式(2)的干扰和模式(3)的参考输入具有渐近调节性，且控制器具有 Robust 性．于是控制器(7)是系统(1)的 K^* 下的 Robust 控制器．　　证毕．

从上所述，得如下系统(1)在给定 GIS K^* 下关于分别具有模式(2)和(3)的扰动和参考输入的 Robust 控制器的存在性判断和设计步骤：

1) 根据模式(2)和(3)，构造集合 P；

2) 验证条件(8)和(9)，只要有一个不成立，则该控制器不存在，停止．否则转下一步；

3) 构造伺服补偿器(4)和增广系统(6)；

4) 用适当的方法，如文献[3]的方法，设计 K_g^* 下的镇定补偿器(5)，以镇定增广系统(6)；

5) (4)式和(5)式组成了系统(1)在 K^* 下的关于扰动 $\boldsymbol{w}(t)$ 和参考输入 $\boldsymbol{y}^r(t)$ 的 Robust 控制器(7)．

注 1. 若 K^* 是经济信息结构[5,6,7,8]，则 K^* 下的 Robust 控制器即为具有最小信息传输费用的经济 Robust 控制器．

注 2. 伺服补偿器的结构由干扰和参考输入的模式所决定，其阶数是一定的，所以只能用降低镇定补偿器的阶数的方法(若可行的话)，以减少整个控制器的阶数．但须指出，随着控制器阶数的减小，可调参数随之减少，可能会使系统的品质下降．阶数的确定应视具体情况而定．

推论 1. 定理 1 中的两个条件等价于

1) $FM^{us}(C, A, B; K^*) = \phi$,　　(11)

2) $\lambda\bar{\in}FM\left(\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & \lambda I_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; [K^* \vdots K^*]\right)$, $\forall\lambda\in P$. (12)

证. 从(11)式和(12)式显然可推得(8)式和(9)式. 反之,只须证

$$\lambda\bar{\in}FM(C, A, B; K^*), \quad \forall\lambda\in \mathrm{Ch}^{us}(A)\cap P. \tag{13}$$

由(9)式及引理1, 存在 $K=(k_{ij})\in R(K^*)$, 使 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I & BK \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m$. 记 $B=[b_1b_2\cdots b_r]$. 于是$BK=\left[\sum_{i=1}^{r} b_i k_{i1}, \cdots, \sum_{i=1}^{r} b_i k_{im}\right]$, 其中 $k_{ij}=0$, 当$(i,j)\bar{\in}K^*$. 易证存在 $i_j(j=1,2,\cdots,m;\ i_1<i_2<\cdots<i_m)$, 有 $k_{i_j,i}\neq 0$ 及

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I & b_{i_1} & b_{i_2}\cdots b_{i_m} \\ C & 0 & 0\cdots 0 \end{bmatrix} = n+m.$$

记 $\bar{B}=[b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_m}]$. 显然, $\bar{K}^*\triangleq K^*(i_1,\cdots i_m;\ 1,\cdots,m)$ 是K^*的非奇异子结构矩阵. 从而 $(C, A, \bar{B}, \bar{K}^*)\in N.N.\mathrm{Sub}\ (C, A, B; K^*)$, 且

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I & \bar{B} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m.$$

于是 $\lambda\bar{\in}TZ(C, A, \bar{B})$. 由引理3, $\lambda\bar{\in}FM(C, A, B; K^*)$,故(13)成立. 证毕.

注3. 若K^*为块对角IS, 推论1即为文献[2]的有关伺服问题 Robust 分散控制的相应结果.

推论2. 若K^*为集中 IS, 则定理1的两个条件等价于

1) $FM^{us}(C, A, B; K^*)=\phi$, (14)

2) $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_n & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m$, $\forall\lambda\in P$. (15)

证. 首先,由推论1知(14)式成立. 由(9)式及引理1知(15)式成立.

反之,由(14)式显然可知(8)式成立. 由(15)式知, 对每个$\lambda\in P$, 必存在 $r\times m$维常数矩阵$\tilde{K}$, 使有 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_n & B\tilde{K} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m$. 令$\bar{K}$为$r\times m$维零矩阵, 则显然 $\bar{K}\in R(K^*)$ 和 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A-\lambda I_n+B\bar{K}C & B\tilde{K} \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m$. 于是在 $R(K^*)$ 中存在$\bar{K}$和$\tilde{K}$, 有 $\lambda\bar{\in}\mathrm{Ch}\left(\begin{bmatrix} A+B\bar{K}C & B\tilde{K} \\ C & \lambda I \end{bmatrix}\right)=\mathrm{Ch}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & \lambda I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}[\bar{K}\ \tilde{K}]\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\right)$. 于是(9)式成立. 证毕.

四、例 子

例1. 设有系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+Ew(t),\quad y(t)=Cx(t) \tag{16}$$

和 IS K^*. 其中 $x\in R^3$, $u\in R^3$, $y\in R^2$, $n=3$, $r=2$, $m=2$, $\Omega=1$,

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ K^*=\begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix},$$

$w \in R^1$ 是幅值未知的阶跃型干扰，E是未知的具有相应维数的实矩阵．设 $y^r(t) \in R^2$ 是任意的定值参考输入．试设计 K^* 下的 Robust 控制器．

解．1）构造集合 P．由 $w(t)$ 和 $y^r(t)$ 的模式，$P=\{0\}$．

2）验证条件(8)和(9)．显然 $\mathrm{Ch}(A)=\{1,1,1\}$，$(C,A,B;K^*)\in N.N.\mathrm{Sub}.(C,A,B;K^*)$．因当 $\lambda\in\mathrm{Ch}(A)$，$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}A-\lambda I & B\\ C & 0\end{bmatrix}=5=n+\min(m,r)$．　故 $\lambda=1\bar{\in}TZ(C,A,B)$．　由引理 3，$FM(C,A,B;K^*)=\phi$．　从而(8)式成立．类似可证条件(9)成立．

3）因 $P=\{0\}$，$q=1$．故 $\mathscr{C}=[0]$，$\mathscr{B}=[1]$．$A_1=I_2$，$A_2=0$．按(4)式，伺服补偿器为 $\dot{\eta}(t)=A_2\eta(t)+A_1e(t)=e(t)\triangleq y(t)-y^r(t)$．

由(6)式，得增广系统

$$\dot{x}_g(t)=A_gx_g(t)+B_gu(t),\ y_g(t)=C_gx_g(t), \tag{17}$$

其中

$$x_g=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ A_g=\begin{bmatrix}A & 0\\ A_1C & A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix},\ B_g=\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$C_g=\begin{bmatrix}C & \\ & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

4）设计 $K_g^*=[K^*\vdots\bar{K}^*]$ 下的镇定增广系统(17)的镇定补偿器．因 $q=1$，所以 $\bar{K}^*=K^*$．系统(17)和 IS K_g^* 分别是文献[3]中例题的系统和 IS．直接运用其结果，镇定补偿器为

$$\dot{\xi}(t)=S\xi(t)+R_1y(t)+R_2\eta(t),\ u(t)=Q\xi(t)+K_1y(t)+K_2\eta(t),$$

其中 $S=-1$，$R_1=[1,\ -57.85139]$，$R_2=[-43.04167,\ 0.875]$，

$$Q=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},\ K_1=\begin{bmatrix}-134.5708 & 123.3708\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ K_2=\begin{bmatrix}-2.61666 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}.$$

5）综合以上，得系统(16)在 K^* 下的 Robust 控制器(7)．

例 2[10,11]．考虑系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+Ew(t),\ y(t)=Cx(t), \tag{18}$$

其中 $x\in R^2$，$u\in R^2$，$y\in R^2$，$w\in R^1$，$n=2$，$r=2$，$m=2$，$\Omega=1$，

$$A=\begin{bmatrix}-0.395 & 0.01145\\ -0.011 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.03362 & 1.038\\ 0.000966 & 0\end{bmatrix},\ C=I_2.$$

$w(t)$ 是幅值未知的阶跃型干扰． $E\in R^{2\times1}$ 为未知的实常数阵，$y^r(t)$ 是任意的定值参考输入．试选择一个经济信息结构 K^*，并构造 K^* 下的 Robust 控制器．

解．应用文献[7]的方法，求得系统(18)有两个经济信息结构：$\begin{bmatrix}* & 0\\ 0 & *\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & *\\ * & 0\end{bmatrix}$．现取

$$K^*=\begin{bmatrix}* & 0\\ 0 & *\end{bmatrix}.$$

1）由干扰和参考输入的模式，有 $P=\{0\}$，$q=1$．

2）因为 $\mathrm{Ch}(A)=\{-0.00032,\ -0.395\}$，条件(8)显然成立．和例 1 类似，可证条件(9)成立．

3）显然，$\mathscr{C}=[0]$，$\mathscr{B}=[1]$，$\Lambda_2=O_2$，$\Lambda_1=I_2$. 由（4）式，伺服补偿器为

$$\dot{\eta}(t)=\Lambda_1 e(t)=y(t)-y^r(t).$$

由（6）式得增广系统

$$\begin{cases}\dot{x}_g=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\eta}\end{bmatrix}=A_g x_g(t)+B_g u(t)=\begin{bmatrix}-0.395 & 0.01145 & 0 & 0\\ -0.011 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}x_g(t)+\begin{bmatrix}0.03362 & 1.038\\ 0.000966 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}u(t),\\ y_g(t)=\begin{bmatrix}y(t)\\ \eta(t)\end{bmatrix}=C_g x_g(t),\ C_g=I_4.\end{cases} \tag{19}$$

4）设计 $K_g^*=[K^*\vdots\bar{K}^*]$ 下镇定增广系统（19）的镇定补偿器. 因 $q=1$，所以 $K_g^*=[K^*\ K^*]$. 容易验证 $FM(C_g, A_g, B_g; K_g^*)=\phi$，从而增广系统（19）在 K_g^* 下极点可任意近似地被配置[3]. 即对复平面中的任意非空对称开集 D，存在非负整数 n_1 和 n_2，实数矩阵 $\begin{bmatrix}K & Q\\ R & S\end{bmatrix}$，使

$$\mathrm{Ch}\left(\begin{bmatrix}A+BKC & BQ\\ RC & S\end{bmatrix}\right)\subset D.$$

其中 $K\in R(K^*)$，$Q=\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{bmatrix}$，$Q_i\in R^{1\times n_i}$，$i=1, 2$，$R\in R(R^*)$，$R^*=\begin{bmatrix}R_1^*\\ R_2^*\end{bmatrix}$，$R_i^*(n_i)$ $\bar{K}_i^*$，$\bar{K}_1^*=[*\ 0\ *\ 0]$，$\bar{K}_2^*=[0\ *\ 0\ *]$，$S=\begin{bmatrix}S_1 & 0\\ 0 & S_2\end{bmatrix}$，$S_i\in R^{n_i\times n_i}$，$i=1, 2$.

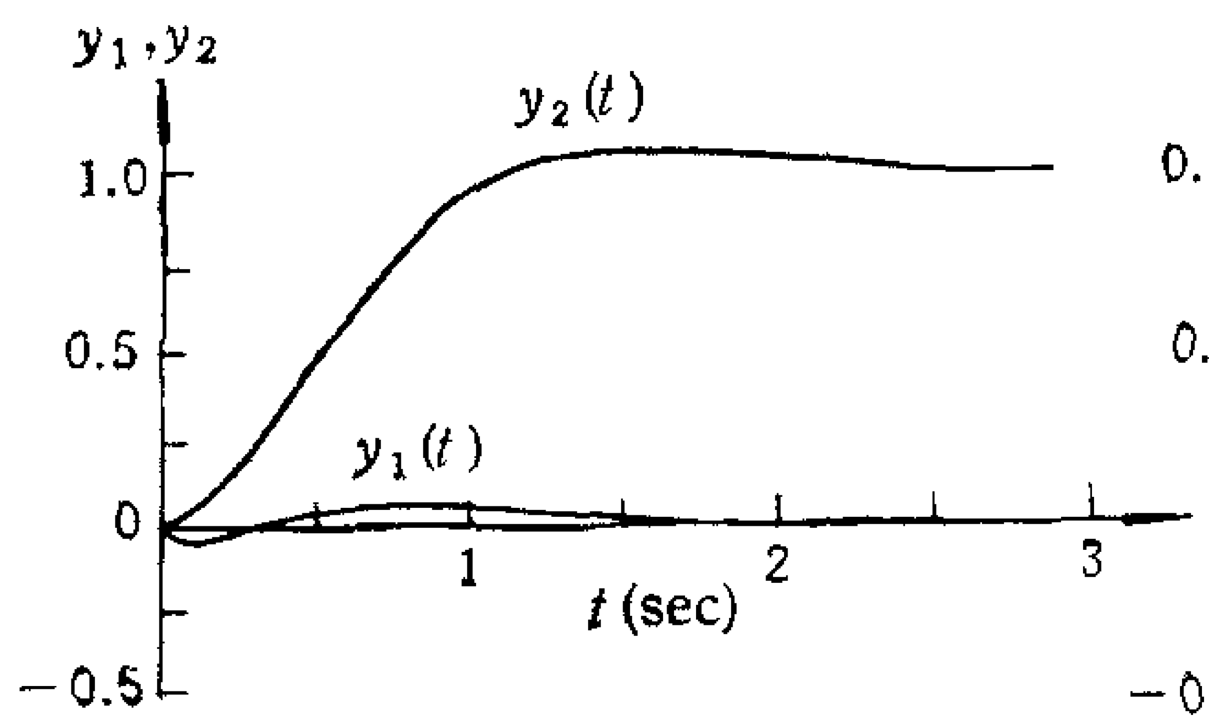

图 1 $y^r(t)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$，$w=0$ 时，y_1 和 y_2 的响应曲线

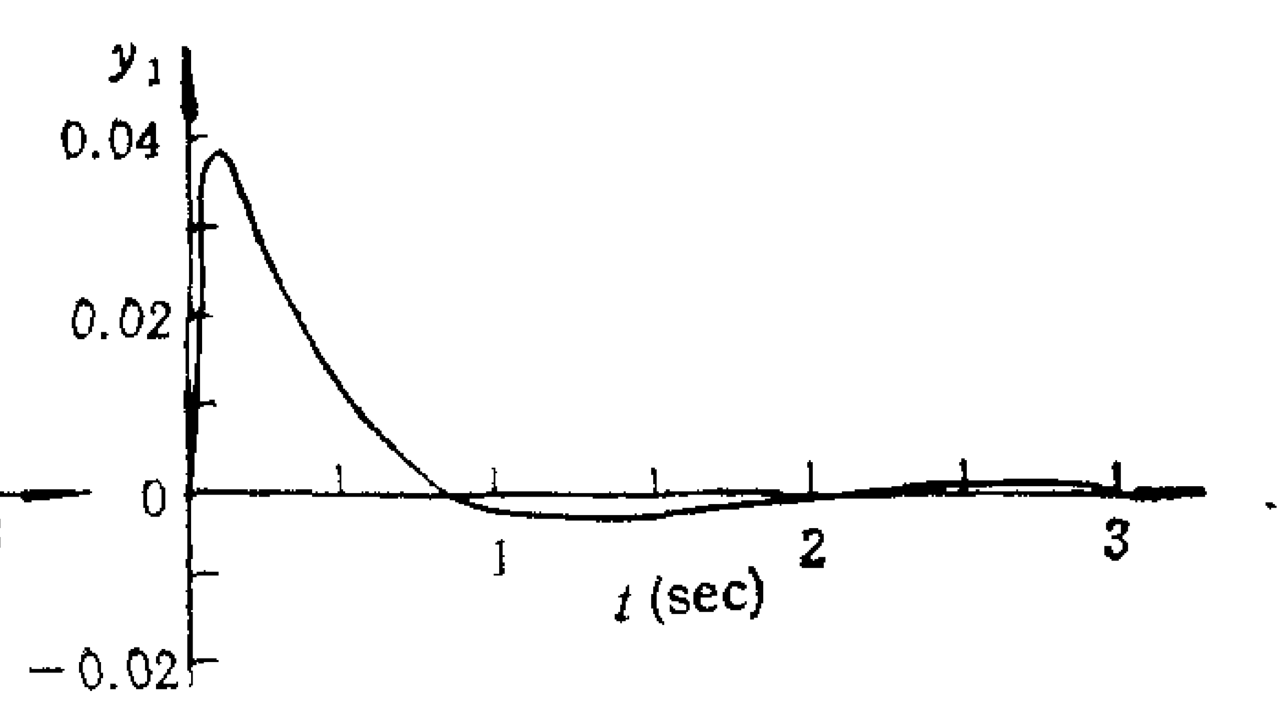

图 2 $y^r(t)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，$Ew(t)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ 时，y_1 的响应曲线

因为增广系统为 4 阶，K_g^* 具有 4 个结构元素，故有可能取 $n_1=n_2=0$，就可精确配置增广系统的全部极点. 设用 K_g^* 下的静态输出反馈控制器可把 4 个极点配置在集合

$$\bar{D}=\{-2\pm 2j,\ -48,\ -62\}.$$

设 $K_g=\begin{bmatrix}k_1 & 0 & k_2 & 0\\ 0 & k_3 & 0 & k_4\end{bmatrix}$，从

$$\mathrm{Ch}(A_g+B_g+C_g)=\bar{D}$$

得一非线性方程组. 解之，得 $k_1=-3389.644$，$k_2=-88953.95$，$k_3=134.1042$，$k_4=269.0739$. 于是镇定补偿器为

$$u(t)=K_g y_g(t)=\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_3\end{bmatrix}y(t)+\begin{bmatrix}k_2 & 0\\ 0 & k_4\end{bmatrix}\eta(t).$$

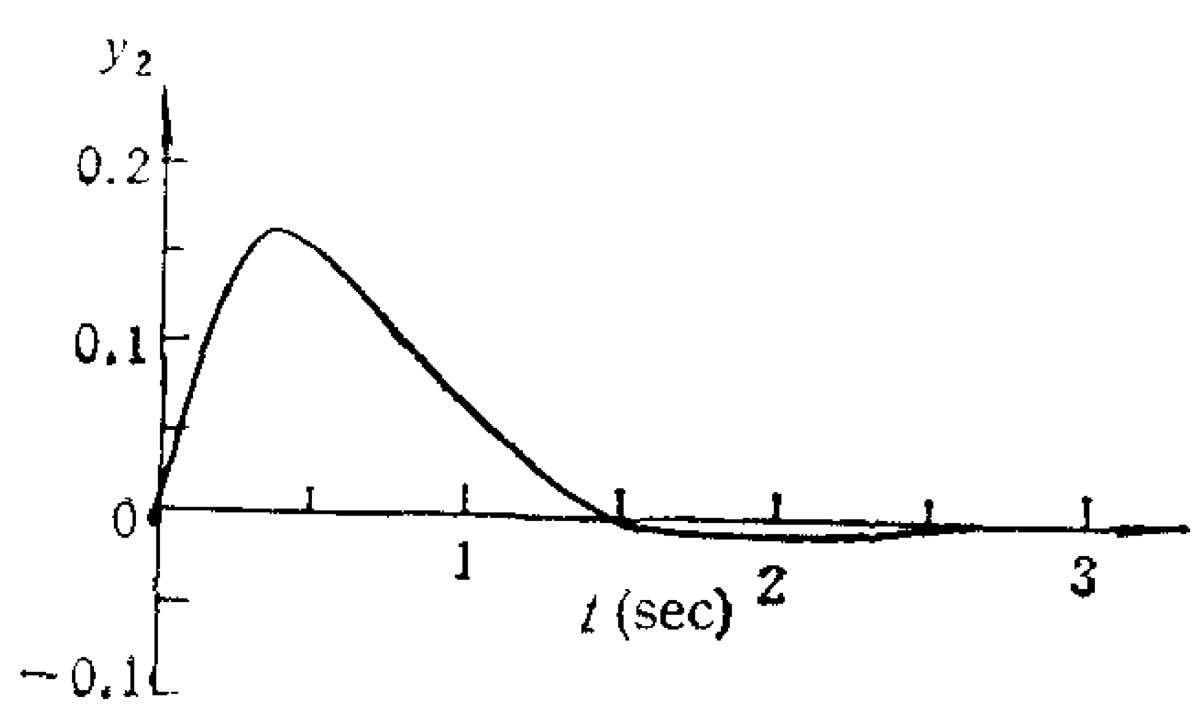

图 3 $y^r(t)=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，$Ew(t)=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ 时，y_2 的响应曲线

5）组合伺服补偿器和镇定补偿器，得 Robust 控制器

$$\dot{\eta}(t)=y(t)-y^r(t),\ u(t)=\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_3\end{bmatrix}y(t)+\begin{bmatrix}k_2 & 0\\ 0 & k_4\end{bmatrix}\eta(t).$$

数值模拟证实该控制器使闭环系统渐近稳定、渐近抗干扰和渐近跟踪输入. 图 1—3 是不同干扰和不同参考输入下闭环系统的输出响应曲线.

致谢　作者感谢蒋慰孙教授的指导和帮助.

参　考　文　献

[1] Davison, E. J., The Robust Control of a Servom chanism Problem for Linear Time-invariant Multivariable Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-21**(1976), 25—34.

[2] Davison, E. J., The Robust Decentralized Control of a General Servomechanism Problem, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-21**(1976), 14—24.

[3] 胡仰曾，一般信息结构下系统的镇定和极点配置，自动化学报，**14**(1988)，142—148.

[4] Davison, E. J. and Ozguner, U., Synthesis of th Decentralized Robust Servomechanism Problem Using Local Methods, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-27**(1982), 583—599.

[5] 许晓敏、席裕庚，具有最经济信息结构的分散控制系统的综合，自动化学报，**14**(1988)，1—7.

[6] 郑毓蕃、韩正之，分散系统经济控制的一种方法，自动化学报，**14**(1988)，281—284.

[7] Hu, Y. Z. and Jiang, W. S., The Economical Output Feedback Stabilization Problem of Linear Multivariable Systems, A Bridge Between Control Science and Technology, Proceedings of the Ninth Triennial World Congress of IFAC, **1**(1984), 239—244.

[8] Hu, Y. Z. and Jiang, W. S., Minimization of Transmission Cost of Information in Control System, The 4th IFAC/IFORS Symposium, Large Scale System, *Theory and Applications*, **1**(1986), 276—281.

[9] 胡仰曾，控制系统经济结构综合的新方法及计算机辅助设计，自动化学报，**11**(1985)，增刊第一期，55—63.

[10] Davison, E. J. and Ferguson, I. J., The Design o Controllers for the Multivariable Robust Servomechanism Problem Using Parameter Optimization Methods, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-26**(1981), 93—110.

[11] 高龙、王幼毅，一类多变量系统的强抗扰控制，自动化学报，**14**(1988)，241—247.

THE ROBUST CONTROLLER UNDER GENERAL INFORMATION STRUCTURE

Hu Yangzeng

(Research Institute of Automation, East China University of Chemical Technology)

ABSTRACT

On the basis of papers [1,2,3], this paper gives the structure, condition for the existence, and the design procedure of a class of robust controller of the system which are subject to a given general information structure (GIS). The method given in the paper overcomes the drawbacks of increasing the dimension of output vector and making the output matrix not have full rank, which may occur when the GIS are transformed into the block diagonal IS[4]. The paper generalizes the reaults of paper [1] and [2] which deal with the centralized and decentralized IS respectively. If the GIS K^* is an economic IS, then the robust controller constructed under K^* is an economic robust controller, Finally, two examples are given for illustruation.

Key words: Information structure, large-scale systems; robust control.