第 17 卷 第 3 期
1991 年 5 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 17, No. 3
May, 1991

实现输出反馈极点配置的数值方法

邱海明 付明义 周 容
(哈尔滨船舶工程学院航天工程系)

摘 要

本文讨论了用数值方法实现输出反馈极点配置的问题. 求解反馈阵的矩阵方程被等效成非线性向量方程,用牛顿迭代法可求得反馈阵. 本文推导了牛顿迭代法所需的导数公式,并给出有关算例. 还可将非线性向量方程化作性能指标,用寻优的方法求得所需的输出反馈阵.

关键词: 极点,特征值,输出反馈.

一、引 言

多年来,用输出反馈实现线性多变量系统的闭环特征结构配置问题,特别是闭环极点配置问题,一直受到国内外学者的关注. 实现特征结构配置的充分必要条件也有不少讨论[1-3],虽然这些充要条件反映了数学本质,但都很难用于输出反馈控制器的设计. 因而用数值计算的方法设计输出反馈控制器实现闭环特征值或特征结构的配置受到了一定的重视[4-5].

本文讨论用数值计算方法实现输出反馈极点配置问题,即对系统

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu,\\ y = Cx,\end{cases} \tag{1}$$

记作 (A,B,C),其中 $x\in R^n, u\in R^m, y\in R^l, ml\geqslant n$, 矩阵 A,B,C 为适当维数的常值矩阵,要找输出反馈

$$u = Ky + \bar{u}, \tag{2}$$

其中 $\bar{u}\in R^m$ 为参考输入,K为$m\times l$维常值矩阵,使得闭环矩阵 $H = A + BKC$ 的全部特征值,即闭环系统的全部极点在复平面指定的位置上.

牛顿法是解非线性方程组常用的迭代方法,本文将用该法求式(2)中的反馈阵 K,实现闭环极点任意配置. 在此基础上还将研究一种寻优方法以达到同样目的.

二、用牛顿法求输出反馈阵的基本理论

设由所需配置极点构成的闭环特征多项式 $\varphi(s)$ 为

本文于 1989 年 5 月 8 日收到.

$$\varphi(s)=\sum_{i=0}^{n} a_i s^i, \tag{3}$$

因特征多项式是首一的,故 $a_n=1$. 由凯莱-哈密顿定理设计的闭环矩阵 $H=A+BKC$ 应满足

$$\varphi(A+BKC)=\sum_{i=0}^{n} a_i(A+BKC)^i=0. \tag{4}$$

反之易证,以满足矩阵方程式(4)的解 K 作反馈阵,必使闭环系统实现所需的极点配置。

引理 1[6]. 若系统 (A,B,C) 能控能观,那么,几乎对所有的输出反馈 $\boldsymbol{K}$,都使闭环矩阵 $A+BKC$ 具有互异的特征值,且 $A+BKC$ 是循环的。

引理 2[6]. 若系统 (A,B) 是能控的,且 A 是循环的,那么,几乎对所有的 m 维实向量 $\boldsymbol{r}$,都有系统 $(\boldsymbol{A},B\boldsymbol{r})$ 是能控的.

定理. 若系统 (A,B,C) 能控能观,那么,$\varphi(A+BKC)=0$ 的充分必要条件是 $\varphi(A+BKC)\boldsymbol{\xi}=0$,其中 $\boldsymbol{\xi}=B\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}$ 为几乎任意的 m 维非零向量.

证. 必要性是显见的. 对充分性,若

$$\varphi(A+BKC)\boldsymbol{\xi}=\sum_{i=0}^{n} a_i(A+BKC)^i\boldsymbol{\xi}=0, \tag{5}$$

其中 $a_n=1$,设 $(A+BKC)$ 满足一个 n 阶特征多项式 $\bar{\varphi}=0$,即

$$\bar{\varphi}(A+BKC)=\sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i(A+BKC)^i=0, \tag{6}$$

其中 $\bar{a}_n=1$,对式(6)右乘 $\boldsymbol{\xi}$,并与式(5)相减,有

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i-\bar{a}_i)(A+BKC)^i\boldsymbol{\xi}=0. \tag{7}$$

因系统 (A,B,C) 能控能观,故闭环系统 $(A+BKC,B,C)$ 能控能观。由引理 1,$(A+BKC)$ 几乎总是循环的. 由引理 2,对几乎所有的 $\boldsymbol{r},\boldsymbol{\xi}=B\boldsymbol{r}$ 都有 $(A+BKC,\boldsymbol{\xi})$ 能控. 由系统 $(A+BKC,\boldsymbol{\xi})$ 的能控阵满秩知,$\boldsymbol{\xi},(A+BKC)\boldsymbol{\xi},\cdots,(A+BKC)^{n-1}\boldsymbol{\xi}$ 线性独立,由式(7),有

$$a_i=\bar{a}_i,\quad (i=0,1,\cdots,n-1),$$

即 $\bar{\varphi}(s)=\varphi(s)$,亦即 $\varphi(A+BKC)=0$. 证毕

上述定理把求解 K 的矩阵方程变换为向量方程,即化成有 n 个方程的非线性方程组,而牛顿迭代法正是解这类问题的常用方法. 若记

$$K=[k_{ij}]=[\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_l],$$
$$\boldsymbol{k}=[k_{11},k_{21},\cdots,k_{m1},k_{12},\cdots,k_{ml}]^T,$$
$$F(\boldsymbol{k})=\varphi(A+BKC)\boldsymbol{\xi}=0,$$

则由牛顿迭代法,$\boldsymbol{k}$ 可用如下迭代公式解得:

当 $ml=n$ 时,

$$\boldsymbol{k}^{(i)}=\boldsymbol{k}^{(i-1)}-\left(\frac{dF}{d\boldsymbol{k}}\right)^{-1}F(\boldsymbol{k}^{(i-1)}); \tag{8}$$

当 $ml>n$ 时,

$$\boldsymbol{k}^{(i)} = \boldsymbol{k}^{(i-1)} - \left(\frac{dF}{d\boldsymbol{k}}\right)^T \left[\frac{dF}{d\boldsymbol{k}} \cdot \left(\frac{dF}{d\boldsymbol{k}}\right)^T\right]^{-1} F(\boldsymbol{k}^{(i-1)}). \tag{9}$$

其中上标 (i) 表示第 i 次迭代值,$dF/d\boldsymbol{k}$ 为 $n \times ml$ 维导数矩阵.

三、计 算 方 法

1. 导数公式

能否找到简单易行的求 $dF/d\boldsymbol{k}$ 的方法，是否能用式(8)或式 (9) 求解反馈阵的关键. 若记

$$B = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m], \quad C^T = [\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{c}_l],$$

则 $H = A + BKC$ 对 K 中元素 k_{uv} 的导数为

$$\frac{dH}{dk_{uv}} = B\frac{dK}{dk_{uv}}C = \boldsymbol{b}_u \boldsymbol{C}_v^T,$$

故

$$\frac{d}{dk_{uv}} H^i \boldsymbol{\xi} = \sum_{j=1}^{i} d_v(i-j) H^{j-1} \boldsymbol{b}_u, \tag{10}$$

其中 $d_v(i-j)$ 为标量,由下式定义

$$d_v(i) = \boldsymbol{C}_v^T H^i \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{C}_v^T (A + BKC)^i \boldsymbol{\xi}, \tag{11}$$

从而

$$\frac{dF(k)}{dk_{uv}} = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{d}_v(j) H^j \boldsymbol{b}_u, \tag{12}$$

其中 $\bar{d}_v(j)$ 为标量,由下式定义:

$$\bar{d}_v(j) = \sum_{i=0}^{n-j-1} a_{i+j+1} d_v(i). \tag{13}$$

显见，$F(\boldsymbol{k})$ 对 K 阵中第 v 列的导数为

$$\frac{dF(k)}{d\boldsymbol{k}_v} = \sum_{j=0}^{n-1} \bar{d}_v(j) H^j B, \tag{14}$$

从而

$$\frac{dF(\boldsymbol{k})}{d\boldsymbol{k}} = \left[\frac{dF(\boldsymbol{k})}{d\boldsymbol{k}_1}, \frac{dF(\boldsymbol{k})}{d\boldsymbol{k}_2}, \cdots, \frac{dF(\boldsymbol{k})}{d\boldsymbol{k}_l}\right]. \tag{15}$$

到此,在选定某个初始迭代阵 K_0 后,就可用式(8)或式(9)进行迭代，求出满足条件的反馈阵.

2. 数值举例

对系统 (A, B, C)，若

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

易知系统能控能观,若所要配置的闭环极点为 $-0.5, -1, -3, -4$, 即闭环特征多项式为

$$\varphi(s)=s^4+8.5s^3+23s^2+21.5s+6,$$

选 $\boldsymbol{r}=[1,2]^T$，选K的初始阵为

$$K_0=\begin{bmatrix}-40 & 30 & 130\\ 5 & -9 & -15\end{bmatrix},$$

按式(9)迭代可得

$$K=\begin{bmatrix}-36.6550 & 31.2484 & 129.3598\\ 3.7525 & -3.1550 & -13.2525\end{bmatrix}.$$

易知该反馈阵使闭环系统具有所要配置的极点。

四、求反馈阵 K 的寻优方法

本文已经把输出反馈阵K满足的矩阵方程(4)化作了向量方程(5)。考虑如下性能指标：

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{k})&=\boldsymbol{\xi}^T\varphi^T(A+BKC)\varphi(A+BKC)\boldsymbol{\xi}\\&=\boldsymbol{r}^TB^T\varphi^T(A+BKC)\varphi(A+BKC)B\boldsymbol{r},\end{aligned}\tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为几乎任意的m维非零向量。显见 $g(\boldsymbol{k})$ 是一个二次型，有 $g(\boldsymbol{k})\geqslant 0$。标量式(16)是向量式(5)的内积，故当且仅当反馈阵K实现闭环极点配置时，$g(\boldsymbol{k})=0$，取极小值。以K中元素作为优化参数，用任何一种优化方法，都可以求得所需的反馈阵。

上述性能指标只需进行代数的初等运算，而且在迭代过程中可以用$g(\boldsymbol{k})$是否为零来判断是否收敛于整体极小点，因而该性能指标简单实用。

对上节中的数值系统，配置与数例中相同的极点，选用相同的 $\boldsymbol{r}$ 和 K_0，用方向加速法可得到与上节同样的反馈阵 K，且初始性能指标值与终止性能指标值分别为

$$g(\boldsymbol{k}_0)=18289323.5,\quad g(\boldsymbol{k})=0.0006265.$$

五、结 束 语

当系统 (A,B,C) 能控能观，且 $ml\geqslant n$ 时，从所要配置的极点算出闭环特征多项式 $\varphi(s)$，任意选择一个非零的m维向量 $\boldsymbol{r}$ 和某个初始反馈阵 K_0，可以按式(8)或式(9)用牛顿迭代法求出反馈阵K实现闭环极点配置，或以式(16)作为性能指标，用任意一种寻优的方法求得所需的反馈阵。在有多组解存在时，选定不同的初值，可能得到不同的解。应当指出，由于牛顿迭代法固有的缺点，并不能保证选定任何初值都能收敛到实现闭环极点配置的反馈阵，但只要改变初值，并不难求得满足条件的解。在采用寻优方法时，收敛于局部极小点还是整体极小点，很容易从性能指标 $g(\boldsymbol{k})$ 的值是否为零来判断。

参 考 文 献

[1] Sambandan, A. and Chandrasekharan, P. C., Eigenvector Assignment Using Output Feedback, *Int. J. Control*, **34**(1981), 1143.

[2] Fletcher, L. R., Kautsky, J., Kolka, G. K. G. and Nichols, N. K., Some Necessary and Sufficient Conditions for Eigenstructure Assignment, *Int. J. Control*, **42**(1985), 1457.

[3] Kwon, B. H. and Youn, M. J., Eigenvalue-generalized Eigenvector Assignment by Output Feedback, *IEEE Trans. Autom. Control,* 32(1987), 417.
[4] Mieke, R. R. and Liberty, S. R., An Eigenvalue/eigenvector Assignment Algorithm Using Output Feedback, Proc. of IEEE, Southeasten Conference, Orlando, FL (1983).
[5] Patel, R. R. and Misra, P., A Numerical Algorithm for Eigenvalue Assignment by Output Feedback, Computational and Combinatorial Methods in System Theory, Stockholm, Sweden, 10—14 June, 1985.
[6] Chi-Tsong Chen, Linear System Theory and Design, Holt Rinehart and Winston, 1984.

AN ALGORITHM FOR POLE ASSIGNMENT BY OUTPUT FEEDBACK

Qiu Haiming　Fu Mingyi　Zhou Rong
(Department of Aerial Space Engineering, Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

ABSTRACT

The problem of pole assignment by output feedback with numerical method is discussed in this paper. The matrix equation for solving the feedback matrix is transformed to a non-linear vector equation which can be solved by the Newton recursive method. The formula of derivative used in Newton recursive method is introduced with numerical examples. The non-linear vector equation can be transformed into a performance index with which any optimization method can be used to obtain the required output feedback matrix.

Key words: Pole; eigenvalue; output feedback.