第 17 卷 第 3 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 3
1991 年 5 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1991

延时双线性系统参数估计的一种新方法——Fourier 级数法

胡健生　　杨成梧
（华东工学院自动化系，南京）

摘　要

本文提出了一种用 Fourier 级数来估计延时双线性系统模型参数的新方法. 通过 Fourier 级数的延时分析法，把原延时双线性系统方程转换成可用输入输出信息来确定待定参数的代数方程，最后用最小二乘法得到参数的估计值. 与 Walsh 级数方法相比本文给出的运算矩阵精确度更高，并且在输入信息是正弦信号时，计算过程相当简洁.

关键词： 延时，双线性，参数估计，傅里叶级数.

一、Fourier 级数分析

一个在 $[0,T](T>0)$ 区间上定义的平方可积函数 $f(t)$ 总可以展开成 Fourier 级数

$$f(t)=\alpha_0\phi_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n\phi_n(t)+\beta_n\phi'_n(t)], \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases}\phi_0(t)=1,\\ \phi_n(t)=\cos\dfrac{2n\pi t}{T},\\ \phi'_n(t)=\sin\dfrac{2n\pi t}{T},\end{cases}\qquad \begin{cases}\alpha_0=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt,\\ \alpha_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos\dfrac{2n\pi t}{T}dt,\\ \beta_n=\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin\dfrac{2n\pi t}{T}dt.\end{cases} \tag{2}$$

用有限项之和来近似

$$f(t)\doteq\alpha_0\phi_0(t)+\sum_{n=1}^{N}[\alpha_n\phi_n(t)+\beta_n\phi'_n(t)]=F^T\Phi(t), \tag{3}$$

其中

本文于 1988 年 10 月 17 日收到.

$$\begin{cases} F^T = [\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\alpha}_1\cdots\boldsymbol{\alpha}_N\boldsymbol{\beta}_1\cdots\boldsymbol{\beta}_N], \\ \Phi(t) = [\boldsymbol{\phi}_0(t)\boldsymbol{\phi}_1(t)\cdots\boldsymbol{\phi}_N(t)\boldsymbol{\phi}'_1(t)\boldsymbol{\phi}'_2(t)\cdots\boldsymbol{\phi}'_N(t)]. \end{cases} \tag{4}$$

Paraskevopoulos[1]给出了 Fourier 级数的积分运算矩阵 P，使得有

$$\int_0^t \Phi(t)dt \doteq P\Phi(t), \quad t\in[0,T] \tag{5}$$

近似式成立.积分矩阵 P 的结构可参考文献[1]，积分矩阵中元素除 $\int_0^t \phi_0(t)dt$ 的表达式是近似的，其它均是精确成立. 在此再引入 Fourier 级数的延时分析. 一个在 $[-\tau, T-\tau](T>\tau>0)$ 上定义的平方可积函数 $f(t-\tau)$ 总可近似展开成

$$f(t-\tau) \doteq F^T\Phi(t-\tau). \tag{6}$$

现在的问题是如何构造一个延时矩阵 D 来沟通 $\Phi(t)$ 和 $\Phi(t-\tau)$ 的联系. 由三角函数中积化和差的性质立即得一个精确关系式 $\Phi(t-\tau) = D\Phi(t)$，其中

$$D = \left[\begin{array}{c|cccc|ccccc} & 1 & 0 & & \cdots & & & & & 0 \\ \hline 0 & \cos\frac{2\pi\tau}{T} & 0\cdots & & 0 & 0 & \sin\frac{2\pi\tau}{T} & 0\cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \cos\frac{2N\pi\tau}{T} & 0 & \cdots & & 0 & \sin\frac{2N\pi\tau}{T} \\ \hline 0 & \sin\frac{2\pi\tau}{T} & 0\cdots & & 0 & 0 & -\cos\frac{2\pi\tau}{T} & 0\cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & \sin\frac{2N\pi\tau}{T} & 0 & \cdots & & 0 & -\cos\frac{2N\pi\tau}{T} \end{array}\right]_{2N+1}, \tag{6}$$

矩阵 D 称作 Fourier 级数的延时矩阵. 再来讨论乘法特性，由三角函数积化和差知

$\Phi(t)\Phi^T(t)G =$

$$\left[\begin{array}{c|cccc|cccc} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_N & \alpha'_1 & \alpha'_2 & \cdots & \alpha'_N \\ \hline \frac{1}{2}a_1 & a_0+\frac{1}{2}a_2 & \frac{1}{2}(a_1+a_3) & \cdots & \frac{1}{2}a_{N-1} & \frac{1}{2}a'_2 & \frac{1}{2}(a'_1+a'_3) & \cdots & \frac{1}{2}a'_{N-1} \\ \vdots & \frac{1}{2}(a_1+a_3) & a_0+\frac{1}{2}a_4 & \cdots & \frac{1}{2}a_{N-2} & \frac{1}{2}(a'_3-a'_1) & \frac{1}{2}a'_4 & \cdots & \frac{1}{2}a'_{N-2} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2}a_N & \frac{1}{2}a_{N-1} & \frac{1}{2}a_{N-2} & \cdots\cdots & a_0 & -\frac{1}{2}a'_{N-1} & -\frac{1}{2}a'_{N-2} & \cdots & 0 \\ \hline \frac{1}{2}a'_1 & \frac{1}{2}a'_2 & \frac{1}{2}(a'_3-a'_1) & \cdots & -\frac{1}{2}a'_{N-1} & \frac{1}{2}a_2+a_0 & \frac{1}{2}(a_3-a_1) & \cdots & \frac{1}{2}a_{N-1} \\ \frac{1}{2}a'_2 & \frac{1}{2}(a'_3-a'_1) & \frac{1}{2}a'_4 & \cdots & -\frac{1}{2}a'_{N-2} & \frac{1}{2}(a_1+a_3) & \frac{1}{2}a_4+a_0 & \cdots & \frac{1}{2}a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{2}a'_N & -\frac{1}{2}a_{N-1} & -\frac{1}{2}a_{N-2} & \cdots & 0 & \frac{1}{2}a_{N-1} & \frac{1}{2}a_{N-2} & \cdots & a_0 \end{array}\right]$$

$$\cdot\,\Phi(t) \tag{7}$$

其中

$$G=[a_0 a_1\cdots a_N a_1'\cdots a_N']. \tag{8}$$

简记上面关系为

$$\Phi(t)\Phi^T(t)G=\widetilde{G}\Phi(t). \tag{9}$$

二、延时双线性系统的参数估计

在一个动态网络或控制系统中,常含有延时元件和延时环节,现在考虑由以下状态方程所描述的延时双线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+L\boldsymbol{x}(t-\tau)+B\boldsymbol{u}(t)+C\boldsymbol{u}(t-\tau)\\ \qquad +\sum_{i=1}^{r}N_i\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{u}_i(t)+\sum_{i=1}^{r}M_i\boldsymbol{x}(t-\tau)\boldsymbol{u}_i(t-\tau),\quad t\in[0,T],\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\\ \boldsymbol{x}(t)=0,t<0.\end{cases} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维状态向量, $\boldsymbol{u}(t)$ 为 r 维输入向量, $\boldsymbol{u}_i(t)$ 是 $\boldsymbol{u}(t)$ 的第 i 个分量. A, L, B, C, N_i 和 M_i 分别是 $n\times n$, $n\times n$, $n\times r$, $n\times r$, $n\times n$, $n\times n$ 维常量矩阵. $\tau(0\leqslant\tau<T)$ 是延时常数. 假定系统模型的阶数确定,系统状态可测量,这样就可根据延时双线性系统的输入输出信息来确定参数 A,L,B,C,N_i,M_i 的值. 现把各向量展开成 Fourier 级数,并取前 $2N+1$ 项.

$$\boldsymbol{x}(t)\doteq[g_0 g_1\cdots g_N g_1' g_2'\cdots g_N']\Phi(t)=G^T\Phi(t), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u}(t)\doteq[h_0 h_1\cdots h_N h_1' h_2'\cdots h_N']\Phi(t)=H^T\Phi(t), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=[x_0\ 0\ \cdots\ 0\ ]\Phi(t)=G_0^T\Phi(t), \tag{13}$$

$$\boldsymbol{u}_i(t)\doteq[h_{i0}h_{i1}\cdots h_{iN}h_{i1}'\cdots h_{iN}']\Phi(t)=H_i^T\Phi(t), \tag{14}$$

$$\boldsymbol{x}(t-\tau)\doteq G^T\Phi(t-\tau)=G^TD\Phi(t), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}(t-\tau)\doteq H^T\Phi(t-\tau)=H^TD\Phi(t), \tag{16}$$

$$\boldsymbol{u}_i(t-\tau)\doteq\Phi^T(t-\tau)H_i=\Phi^T(t)D^TH_i. \tag{17}$$

在(10)式两边对 t 从 0 到 t 积分,并把各展开式代入得

$$G^T\Phi(t)-G_0^T\Phi(t)=AG^TP\Phi(t)+LG^TDP\Phi(t)+BH^TP\Phi(t)+CH^TDP\Phi(t)$$
$$+\sum_{i=1}^{r}N_iG^T\widetilde{H}_iP\Phi(t)+\sum_{i=1}^{r}M_iG^TD\hat{H}_iP\Phi(t), \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases}\Phi(t)H_i^T\Phi(t)=\Phi(t)\Phi^T(t)H_i=\widetilde{H}_i\Phi(t),\\ \Phi(t)\Phi^T(t)D^TH_i=\hat{H}_i\Phi(t),\ \ \overline{H}_i\triangleq D^TH_i.\end{cases} \tag{19}$$

式中 $\widetilde{H}_i$ 和 $\hat{H}_i$ 均根据乘法特性分别由向量 H_i 和 $\overline{H}_i$ 的元素构成,因篇幅有限,其结构省略.

Fourier 函数是一类完全正交的函数,可得

$$G^T-G_0^T=AG^TP+LG^TDP+BH^TP+CH^TDP+\sum_{i=1}^{r}N_iG^T\widetilde{H}_iP+\sum_{i=1}^{r}M_iG^TD\hat{H}_iP. \tag{20}$$

现取拉直线性变换 λ，把矩阵向量变成列向量

$$\lambda(G^T-G_0^T)=[I_n\otimes(G^TP)^T]\lambda(A)+[I_n\otimes(G^TDP)^T]\lambda(L)+[I_n\otimes(H^TP)^T]\lambda(B)$$

$$+[I_n\otimes(H^TDP)^T]\lambda(C)+\sum_{i=1}^{r}[I_n\otimes(G^T\widetilde{H}_iP)^T]\lambda(N_i)+\sum_{i=1}^{r}[I_n\otimes(G^TD\hat{H}_iP)^T]\lambda(M_i), \tag{21}$$

式中⊗表示 Kroneker 乘积符号，I_n 是 $n\times n$ 维单位矩阵.

令 $$\theta^T=[\lambda^T(A)\lambda^T(L)\lambda^T(B)\lambda^T(C)\lambda^T(N_1)\cdots\lambda^T(N_r)\lambda^T(M_1)\cdots\lambda^T(M_r)], \tag{22}$$

$$R=\lambda(G^T-G_0^T), \tag{23}$$

$$S=[I_n\otimes(G^TP)^T,I_n\otimes(G^TDP)^T,I_n\otimes(H^TP)^T,I_n\otimes(H^TDP)^T,$$
$$I_n\otimes(G^T\widetilde{H}_1P)^T,\cdots I_n\otimes(G^T\widetilde{H}_rP)^T,I_n\otimes(G^TD\hat{H}_1P)^T\cdots I_n\otimes(G^TD\hat{H}_rP)^T], \tag{24}$$

则(21)式可写成非常简单的形式

$$S\theta=R. \tag{25}$$

利用最小二乘法可得出参数的估计值

$$\hat{\theta}=(S^TS)^{-1}S^TR. \tag{26}$$

为保证参数估计的唯一性可采用多组输入输出信息进行估计参数.

三、举　　例

例 1. 考虑以下方程所描述的延时双线性系统

$$\dot{x}(t)=ax(t)+lx\left(t-\frac{1}{3}\right)+nx(t)u(t),\quad t\in[0,1),$$

取 $a=1,l=2,n=1,N=3$，用 10 组输入输出信息得

$$\hat{\theta}=[\hat{a}\ \hat{l}\ \hat{n}]=[0.9916,1.9878,0.9891].$$

例 2. 考虑以下二维延时双线性系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+L\begin{bmatrix}x_1\left(t-\frac{1}{3}\right)\\ x_2\left(t-\frac{1}{3}\right)\end{bmatrix}u(t),$$

取 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$, $L=\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}$, $N=3$,用 10 组输入输出信息得

$$\hat{\theta}=[\hat{a}_{11}\hat{a}_{12}\hat{a}_{21}\hat{a}_{22}\hat{l}_{11}\hat{l}_{12}\hat{l}_{21}\hat{l}_{22}]$$
$$=[0.9873,0.0131,1.0247,1.9795,-0.0032,1.0203,2.0041,0.9811].$$

仿真例子假设没有干扰,从理论上讲由于 Fourier 级数展开采用了平均积分,所以在输入输出存在观测噪声时,本算法对独立零均值白噪声有较好的抑制作用.

参　考　文　献

[1] Paraskeropoulos, P. N., Sparis, P. D., Mouroutsos, S. G., The Fourier Series Operational Matrix of Integration, *Int. J. Systems Sci.*, **16**(1985), 171—176.

[2] Liou Chingtien, Chou YiShyong, Piecewise Linear Polynomial Function and Applications to

Analysis and parameter Identification, *Int. J. Systems Sci.*, **18**(1987), 1919—1929.
[3] Yang Chingyu, Solution of Integral Equations via Taylor Series, *Int. J. Systems Sci.*, **19**(1988), 265—273.

A NEW METHOD OF PARAMETER ESTIMATION VIA FOURIER SERIES FOR TIME-DELAY BILINEAR SYSTEMS

Hu Jiansheng Yang Chengwu

(Dept. of Automation, East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract

A new method of parameter estimation via Fourier series for time-delay bilinear systems is presented. By time-delay analysis, the bilinear systems can be expressed by algebric equations, whose parameters can be identified by input and output information. Compared with Walsh function approaches, the computing matrices given in this paper are more accurate, and when the input is a sinusoidal signal, the computation procedure is much more simple.

Key words: Time-delay; bilinear; parameter estimation; Fourier series.