第 17 卷 第 3 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 3
1991 年 5 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1991

固定区间平滑新算法及其在飞行试验中的应用

史 忠 科
(西北工业大学 903 教研室,西安)

摘　　要

本文根据 Kalman 滤波和 Rauch-Tung-Striebel 固定区间平滑公式，提出了信息滤波——固定区间平滑的新算法,并给出了算法的 U-D 分解形式. 由于改变了算法结构，使整个算法的数值稳定性好、可靠性高，而且平滑算法计算量和平滑所需滤波计算量均大为减少. 计算量分析结果表明,新算法与 Bierman 序列滤波和固定区间平滑算法.Keigo. Watanabe 前向平滑方法相比较,计算量减少 40% 以上;当状态转移阵中各元素用 K 的函数表示时，计算量减少50%以上. 本文将此平滑算法用于实际飞机飞行试验的数据处理中,得到了令人满意的结果.

关键词: Kalman 滤波,固定区间平滑,状态估计,数值稳定性,飞行试验.

一、引　　言

固定区间平滑技术在数据处理中有着极为广泛的应用. 如在飞行试验的数据处理中，固定区间平滑技术常常用来估计飞机飞行状态，以便较准确地确定飞机操纵稳定性[1]. 六十年代后，相继出现了一系列的固定区间平滑算法，其中最常用的是 Rauch-Tung-Striebel (R-T-S) 平滑器. 一经使用，人们发现这一算法有两个明显缺点: 一是协方差传播矩阵的计算公式中,有两个正定矩阵相减使其数值稳定性无法保证;二是增益阵的计算速度较低，有矩阵求逆运算和三个矩阵乘积运算; 加之平滑所需滤波计算量太大,影响了计算效率[2]. 因此用小型或微型计算机难以保证算法的数值稳定性，这样就限制了 R-T-S 平滑算法的应用范围. 为了保证平滑算法的数值稳定性并减少整个滤波和平滑算法的计算量,不少作者做了大量的工作[3]. 其中最有效的算法是 Bierman 的序列方法和 Keigo. Watanabe 的前向平滑方法[2-3]. 这些方法,虽然在数值稳定性和计算效率方面有了改善,但计算量仍很可观. 将其用于大批的飞行试验数据处理时，速度太慢,在短时间内难以得到飞行试验的结果并计算出飞机的性能. 严重影响着飞机的试飞周期和研制周期. 为了解决这一问题,本文提出了一种新的信息滤波及固定区间平滑算法.

本文于 1989 年 11 月 1 日收到.

二、信息滤波——固定区间平滑新算法

设线性离散系统的状态方程为

$$\boldsymbol{x}_{j+1}=\phi_{j+1,j}\boldsymbol{x}_j+\Gamma_j\boldsymbol{w}_j, \tag{1}$$

观测方程为

$$\boldsymbol{z}_{j+1}=H_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1}+\boldsymbol{v}_{j+1}, \tag{2}$$

其中 $x\in R^n$, $w\in R^p$, $z\in R^m$; 并假定

$$E\{\boldsymbol{v}_j\}=0,\ E\{\boldsymbol{w}_j\}=0,\ E\{\boldsymbol{w}_j\boldsymbol{v}_k^T\}=0,$$

$$E\{\boldsymbol{w}_j\boldsymbol{w}_k^T\}=\delta_{jk}Q_j,\ E\{\boldsymbol{v}_j\boldsymbol{v}_k^T\}=\delta_{jk}R_j,$$

$$\delta_{jk}=\begin{cases}0, & k\neq j,\\ 1, & k=j,\end{cases}\qquad j,k=0,1,\cdots,N.$$

R-T-S 固定区间平滑公式为[4]

$$\boldsymbol{x}_{j/N}=x_{j/j}+G_j(x_{j+1/N}-x_{j+1/j}), \tag{3}$$

$$P_{j/N}=P_{j/j}+G_j(P_{j+1/N}-P_{j+1/j})G_j^T, \tag{4}$$

$$G_j=P_{j/j}\phi_{j+1,j}^TP_{j+1/j}^{-1}, \tag{5}$$

其中 $j=0,1,\cdots,N-1$.

平滑计算式中所需的 Kalman 滤波公式为[4]

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_{j+1/j}=\phi_{j+1,j}\boldsymbol{x}_{j/j},\\&P_{j+1/j}=\phi_{j+1,j}P_{j/j}\phi_{j+1,j}^T+\Gamma_jQ_j\Gamma_j^T,\\&\boldsymbol{x}_{j+1/j+1}=\boldsymbol{x}_{j+1/j}+K_{j+1}(\boldsymbol{z}_{j+1}-H_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1/j}),\\&P_{j+1/j+1}^{-1}=P_{j+1/j}^{-1}+H_{j+1}^TR_{j+1}^{-1}H_{j+1},\\&K_{j+1}=P_{j+1/j+1}H_{j+1}^TR_{j+1}^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

为了减少平滑所需滤波值的计算量,作如下处理,令

$$\boldsymbol{x}_{j/j}=\phi_{j,0}\boldsymbol{x}_j^*,\quad P_{j/j}=\phi_{j,0}P_{j/j}\phi_{j,0}^T,$$

$$\boldsymbol{x}_{j+1/j}=\phi_{j+1,0}\boldsymbol{x}_{j+1/j}^*,\quad P_{j+1/j}=\phi_{j+1,0}P_{j+1/j}^*\phi_{j+1,0}^T,$$

根据 Kalman 滤波公式(6)可得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_{j+1/j}^*=\boldsymbol{x}_j^*,\\&P_{j+1/j}^{*-1}=P_{j/j}^{*-1}-P_{j/j}^{*-1}E_jQ_j^*E_j^TP_{j/j}^{*-1},\\&\boldsymbol{x}_{j+1}^*=\boldsymbol{x}_j^*+k_{j+1}^*(\boldsymbol{z}_{j+1}-M_{j+1}\boldsymbol{x}_j^*),\\&P_{j+1/j+1}^{*-1}=P_{j+1/j}^{*-1}+M_{j+1}^TR_{j+1}^{-1}M_{j+1},\\&K_{j+1}^*=P_{j+1/j+1}^*M_{j+1}^TR_{j+1}^{-1},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中

$$E_j=\phi_{j+1,0}^{-1}\Gamma_j,\ M_{j+1}=H_{j+1}\phi_{j+1,0},\ Q_j^*=(Q_j^{-1}+E_j^TP_{j/j}^{*-1}E_j)^{-1}.$$

将(7)式代入(3)式可得

$$\boldsymbol{x}_{j/N}=\phi_{j,0}[\boldsymbol{x}_j^*+A_j(\boldsymbol{x}_{j+1/N}^*-\boldsymbol{x}_j^*)], \tag{8}$$

式中

$$\boldsymbol{x}_{j+1/N}^*=\phi_{j+1,0}^{-1}\boldsymbol{x}_{j+1/N},\ A_j=\phi_{j,0}^{-1}G_j\phi_{j+1,0}.$$

(4)式中有两矩阵相减使 $P_{i/N}$ 的正定性不能保证. 为了保证计算稳定性,必须设法使 $P_{i/N}$ 的计算式中不出现相减运算.

由(4),(5),(6)三式可得

$$P_{i/N} = G_i P_{i+1/N} G_i^T + F_i Q_i^* F_i^T, \tag{9}$$

式中 $F_i = \phi_{i+1,i}^{-1} \Gamma_i$.

在(9)式中，已不再出现两个正定矩阵的相减运算. 为了减少整个平滑计算的工作量,令

$$\left.\begin{aligned} x_{i/N} &= \phi_{i,0} x_{i/N}^*, \\ P_{i/N} &= \phi_{i,0} P_{i/N}^* \phi_{i,0}^T. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

代入(9)式可得

$$P_{i/N} = \phi_{i,0}(A_i P_{i+1/N}^* A_i^T + E_i Q_i^* E_i^T)\phi_{i,0}^T,$$

或

$$P_{i/N}^* = A_i P_{i+1/N}^* A_i^T + E_i Q_i^* E_i^T, \tag{11}$$

且

$$\begin{aligned} A_i &= \phi_{i,0}^{-1} G_i \phi_{i+1,0} \\ &= P_{i/i}^* \phi_{i+1,0}^T P_{i+1/i}^{-1} \phi_{i+1,0} \\ &= P_{i/i}^* P_{i+1/i}^{*-1} \\ &= I - E_i Q_i^* E_i^T P_{i/i}^{*-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

将(12)式代入(8)式可得

$$\begin{aligned} x_{i/N}^* &= x_i^* + A_i(x_{i+1/N}^* - x_i^*) \\ &= x_{i+1/N}^* + E_i Q_i^* E_i^T P_{i/i}^{*-1}(x_i^* - x_{i+1/N}^*). \end{aligned} \tag{13}$$

至此，平滑算法得到了简化. 根据(11)—(13)式可得状态平滑估计值 $x_{i/N}^*$ 和估计误差的协方差阵 $P_{i/N}^*$,根据(10)式可得 $x_{i/N}$ 和 $P_{i/N}$. 平滑所需的滤波值可由(7)式计算.

三、新平滑算法的 U-D 分解及计算量

为了进一步提高算法的计算效率和数值稳定性，滤波和平滑公式中的协方差均采用 U-D 分解. 设

$$P_{i+1/i}^{*-1} = U_{i+1/i} D_{i+1/i} U_{i+1/i}^T, \quad P_{i+1/i+1}^{*-1} = U_{i+1} D_{i+1} U_{i+1}^T,$$
$$P_{i/N}^* = U_{i/N} D_{i/N} U_{i/N}^T, \quad Q_i^* = U_{qi}^{-T} D_{qi}^{-1} U_{qi}^{-1},$$

代入(7)式可得

$$\left.\begin{aligned} U_{i+1/i} D_{i+1/i} U_{i+1/i}^T &= U_i(D_i - S_i Q_i^* S_i^T) U_i^T, \\ U_{i+1} D_{i+1} U_{i+1}^T &= U_{i+1/i} D_{i+1/i} U_{i+1/i}^T + M_{i+1}^T R_{i+1}^{-1} M_{i+1}, \\ x_{i+1}^* &= x_i^* + U_{i+1}^{-T} D_{i+1}^{-1} U_{i+1}^{-1} M_{i+1}^T R_{i+1}^{-1}(z_{i+1} - M_{i+1} x_i^*), \\ B_i^T &= D_{qi}^{-1} U_{qi}^{-1} S_i^T U_i^T, \\ C_i &= E_i U_{qi}^{-T}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中 $S_i = D_i U_i^T E_i$, $Q_i^* = (Q_i^{-1} + S_i^T D_i^{-1} S_i)^{-1}$. 由(11)—(13)式可得

$$\left.\begin{aligned} x^*_{j/N} &= x^*_{j+1/N} + C_j B_j^T (x^*_j - x^*_{j+1/N}), \\ U_{j/N} D_{j/N} U^T_{j/N} &= Y_j D_{j+1/N} Y_j^T + C_j D^{-1}_{qj} C_j^T, \\ Y_j &= (I - C_j B_j^T) U_{j+1/N}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

为了说明该算法有较高的计算效率，表 1 给出了一步平滑所需滤波值的计算量。表 2、表 3 和表 4 分别给出了新算法与 Bierman 序列方法，Keigo. Watanabe 前向平滑法所需计算量的比较。由表 2—表 4 可知，本文方法提高了计算效率。

表 1 一步平滑所需滤波的计算量

算式	加法	乘法	除法
E_j	$np(n-1)$	n^2p	
M_{j+1}	$nm(n-1)$	n^2m	
C_j	$\frac{1}{2}np(p-1)$	$\frac{1}{2}np(p+1)$	
U_{qj}, D_{qj}[4]	$np(p+1)+\frac{3}{2}p(p-1)$	$np(p+1)+\frac{1}{2}p(p-1)$	p
S_j	$\frac{1}{2}np(n-1)$	$\frac{1}{2}np(n+1)$	
B_j	$\frac{1}{2}np(n-1)+\frac{1}{2}np(p-1)$	$\frac{1}{2}np(n-1)+\frac{1}{2}np(p+1)$	
$U_{j+1/j}, D_{j+1/j}$[4]	$np(n-1)$	$np(n+1)$	$2n$
U_{j+1}, D_{j+1}[4]	n^2m	$n^2m+2nm-m$	$2m(n-1)$
x^*_j	$n^2+2mn-n$	$n^2+2nm+m$	
$\phi_{j+1,0}$	$n^2(n-1)$	n^3	
$\phi^{-1}_{j+1,0}$	$\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n)$	$\frac{1}{3}(n^3-n)$	n
总计	$\frac{4}{3}n^3+n^2\left(3p+2m-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}p\cdot(p-1)+n\left(2p^2+m-3p-\frac{5}{6}\right)$	$\frac{4}{3}n^3+n^2(3p+2m+1)-\frac{1}{3}n+n(2p^2+3p+4m)+\frac{1}{2}p(p-1)$	$3n+p+2m(n-1)$

表 2 一步平滑所需计算量的比较

算法	加法	乘法	除法
MS[4]	$1.5n^3+n^2(p+1)+n(p+1.5)$	$1.5n^3+n^2(p+2)-0.5n$	$n-1$
FPS[2]	$1.5n^3-0.5n+n^2+(1.5n^3+0.5n^2+4n)p$	$1.5n^3+3n^2-1.5n+(1.5n^3+3n^2+3.5n)p$	$(n-1)(1+3p)$
SS[4]	$1.5n^3-0.5n+n^2+(1.5n^3+0.5n^2+5n)p$	$1.5n^3+3n^2-1.5n+(1.5n^3+3n^2+4.5n)p$	$(n-1)(1+3p)$

表 3　一步平滑所需滤波计算量比较

算　法	加　法	乘　法	除　法
MS	$\frac{4}{3}n^3+n^2\left(3p+2m-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}p\cdot(p-1)+n\left(2p^2+m-3p-\frac{5}{6}\right)$	$\frac{4}{3}n^3+n^2(3p+2m+1)-\frac{1}{3}n+n(2p^2+3p+4m)+\frac{1}{2}p(p-1)$	$3n+p+2m(n-1)$
FPS	$1.5n^3+0.5n^2(3p+2m+1)+n(m+2.5p)$	$1.5n^3+n^2(m+1.5p+2)+n(2m+6.5p-0.5)$	$n-1+(n+1)p$
SS	$1.5n^3+0.5n^2(4p+3m+1)+1.5nm$	$1.5n^3+n^2(2p+1.5m+2)+n(2p+5.5m-0.5)$	$n(3p+1)+nm-(p+1)$

表 4　一步滤波平滑所需总计算量的比较

算　法	$n=10,\ P=m=2$			$n=10,\ p=m=6$			$n=m=p=10$		
	加　法	乘　法	除　法	加　法	乘　法	除　法	加　法	乘　法	除　法
MS	4153	4546	77	7195	7880	153	10925	11870	229
FPS	6895	8089	94	14580	16500	246	21895	25180	398
SS	7075	8290	150	14980	17100	414	22795	26180	678
	$n=30,\ P=m=4$			$n=30,\ P=m=15$			$n=m=P=30$		
MS	85928	89093	355	157835	163640	1004	279875	289275	1889
FPS	256035	268680	530	733710	775515	1828	1385085	1459740	3598
SS	259515	272280	882	746760	786090	3148	1411185	1486740	6238

表中 MS 指本文提出的方法，FPS 指 Keigo. Watanabe 前向平滑方法，SS 指 Bierman 序列方法。MS 的计算量由(15)式及(10)式统计出。

表 4 中的计算量为表 2、表 3 计算量之和。当状态转移阵中各元素用 jT 的函数表示时，$\phi_{j+1,0}$ 及 $\phi_{j+1,0}^{-1}$ 可直接得到。这样 MS 算法中的滤波计算量又可减少 20% 左右。

从存贮量角度来讲，MS 算法所需存贮量较少，它只须存贮 x_j^*, C_j, B_j, D_{qj}, $\phi_{j,0}$。FPS 和 SS 方法都须存贮 Q_j, $\phi_{j+1,j}$, Γ_j，再考虑文献[2]中表 6 的存贮量，三种平滑方法所需存贮量的比较如表 5 所示。

表 5　一步平滑所需存贮量

算　法	MS	FPS	SS
存贮量	$n^2+n(2p+1)+p$	$n^2+p(2n+3)$	$n^2+2p(n+1)+n$

四、新算法在飞行状态估计中的应用

飞机三维运动的方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u} &= -qw + rv + A_x - g\sin\theta,\\ \dot{v} &= -ru + pw + A_y + g\sin\varphi\cos\theta,\\ \dot{w} &= qu - pv + A_z + g\cos\varphi\cos\theta,\\ \dot{\vartheta} &= q\cos\varphi - r\sin\varphi,\\ \dot{\varphi} &= p + q\sin\varphi\mathrm{tg}\theta + r\cos\varphi\mathrm{tg}\vartheta,\\ \dot{h} &= u\sin\vartheta - v\sin\varphi\cos\vartheta - w\cos\varphi\cos\vartheta,\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

式中 A_x, A_y, A_z 为沿体轴系 x,y,z 轴加速度; u,v,w 为沿 x,y,z 轴速度; p,q,r 为滚转、俯仰、偏航角速度; θ,φ 为俯仰、滚转角; h 为高度; g 为重力加速度. 三个加速度和三个角速度作为输入向量; 空速 V, 姿态角 θ,φ, 高度 h, 迎角 α, 侧滑角 β 作为输出量. 考虑输入和输出量的系统误差、尺度因子误差和随机噪声, 并将运动方程离散化后可得[1]

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}_{k+1} &= \phi_{k+1,k}\boldsymbol{x}_k + B_k\boldsymbol{b} + \Gamma_k\boldsymbol{\xi}_k + \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{u}_m),\\ \boldsymbol{y}_{k+1} &= f_2(\boldsymbol{x}_{k+1},\boldsymbol{b}),\\ \boldsymbol{z}_{k+1} &= \boldsymbol{y}_{k+1} + \boldsymbol{\eta}_{k+1},\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{x} = [h,u,v,w,\theta,\varphi]^T$, $\boldsymbol{z} = [h_m,v_m,\alpha_m,\beta_m,\theta_m,\varphi_m]^T$, $\boldsymbol{b}$ 为系统误差、尺度因子误差向量; $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 分别为系统噪声和观测噪声, 并假定满足(1)式对噪声的假设条件; $\boldsymbol{y}$ 称计算输出, 与实际测量向量 $\boldsymbol{z}$ 仅差一随机噪声; 下标 m 表示测量值; $\boldsymbol{u}_m$ 是输入向量的测量值.

根据文献[1], 将(14)式中的 $\boldsymbol{z}_{j+1} - M_{j+1}\boldsymbol{x}_j^*$ 用 $\boldsymbol{z}_{j+1} - \hat{\boldsymbol{y}}_{j+1}$ 代替, 根据(14),(15),(17)三式可对飞行状态 $\boldsymbol{x}$ 进行平滑估计.

$$H_{k+1} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{k+1/k}},\ \boldsymbol{b} = \hat{b}_k.$$

国内外大量的飞行试验表明, 飞机运动方程和对测量的修正公式比较准确, 对噪声的假设比较符合实际. 如果计算输出 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 与实际测量 $\boldsymbol{z}$ 的拟合程度越好, 说明估计的结果越准确.

本文提出的新平滑算法数值稳定性好、计算效率高. 特别是当状态维数较高时, 计算效率将成倍提高.

参 考 文 献

[1] 史忠科、王培德, 非线性分离算法及其在飞行试验中的应用, 航空学报, **10**(1989), B501—508.

[2] Keigo. Watanabe, A New Forward-pass Fixed-interval Smoother Using U-D Information Matrix Factorization, *Automatica*, 22(1986), 465—475.

[3] Bierman, G. J., A New Computationally Efficien Fixed-interval, Discrete-time Smoothers, *Automatica*, 19 (1983), 503—511.

[4] Mayback, P. S., Stochastic Models, Estimation and Control, Academic Press, New York (1979), Vol. 1—2.

A NEW ALGORITHM OF FIXED-INTERVAL SMOOTHER AND ITS APPLICATION TO FLIGHT TEST

Shi Zhongke

(903 *Teaching & Research Section, Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

In this paper, a new information filter and fixed-interval smoother algorithms based on Kalman filter and Rauch-Tung-Striebel smoother are presented, and U-D factorization is used both in the new filter and smoother to get high computational efficiency. These new algorithms exhibit excellent numerical accuracy and stability and the number of operations of both the filter and smoother are decreased greatly since the structures of the new estimators are rearranged. Comparison of operation numbers shows that the new information filter and fixed-interval smoother is more than 1.7 times as fast as Bierman's sequential smoother and Keigo. Watanabe's forward-pass smoother.

Key words: Kalman filter; fixed-interval smoother; state estimation; numerical accuracy; flight test.

编 辑 部 启 事

一、本刊前几年由于出版容量小；来稿量大，出现稿件积压，出版周期过长等问题．对此本刊采取了一系列解决措施．特别是从今年开始，大幅度增加了期刊页面，使稿件积压问题得以根本解决．目前本刊出版周期已控制在一年左右，其中优秀稿件将作到尽早发表．诚恳欢迎自动化界广大作者和读者大力支持本刊工作，踊跃投稿．

二、本刊英文翻译版于1989年开始在美国出版发行，以便进一步扩大《自动化学报》在国际上的影响，促进学术交流．英文翻译版的稿件由中文版已发表的稿件中选取．凡在中文版发表的稿件，其中大部分可能在英文版发表．为了缩短出版周期，请作者尽最大努力提高稿件的翻译质量．

三、本刊将试办优秀论文评选活动，对优秀论文将给予适当奖励．1992年将对1991年《自动化学报》所刊登的各类文章，分别根据学术水平，作者的创造性，对读者的指导性及在国民经济建设中的作用等标准进行评选．为了做好这项工作，希望各位作者及时将您文章的有关情况，如：论文的背景、在学术交流中的作用、获奖情况、推广应用及经济效益情况、文章被引用的情况等附上必要的证明材料及时报编辑部备案． 寄材料时请注明作者姓名及文章发表的卷、期号．

优秀论文评选活动今后将每年举办一次．