第17卷 第3期 自动化学报 Vol. 17, No. 3
1991年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1991

应用对消原理辨识传递函数[1)]

冯纯伯 赵勇
(东南大学自动化研究所,南京)

摘 要

本文提出了一种辨识系统传递函数的新方法. 它是通过引入预滤波器对输入信号进行预处理,调整预滤波器的参数,使其实现与系统传递函数的部分对消,并应用对消原理而得到的一种辨识方法. 这种方法可以分别辨识传递函数的分子、分母及其因子,而且不需要对噪声进行建模. 此法还可以用来辨识误差模型.

关键词: 系统辨识,传递函数的辨识,预滤波,对消.

一、前 言

文献[1—4]提出的传递函数的辨识问题,引起了人们的重视. 从工程角度来看,传递函数及其主要特征的辨识无疑是十分重要的. 文献[5]提出了一种消除估算偏差的新方法,其原理是:对输入信号引入一个已知的滤波器进行预处理,利用此滤波器将已知零点嵌入系统中,然后利用这些零点的信息用相关法求得参数估计的偏差,并予以消除,从而得到无偏估计. 文献[6—9]对此法的理论和应用作了更深入的研究. 这些工作表明这种方法有良好的应用前途. 其突出之点在于对信号进行动态预处理. 文献[5—9]充分利用了预滤波器提供的固定不变的已知极点的信息,但对这些极点的选择并没有分析. 由此得到启发,若合理地选择预滤波器本身的零极点,还可以从中提取更多有用的信息. 从这一点出发,本文提出了一个按对消原理辨识传递函数的方法,即调整预滤波器的零极点,使之与传递函数的部分对消或全部对消,从而达到辨识传递函数的目的. 在以后各节中将说明这种方法可以用于分别辨识系统的零点,极点及其因子;还可以用于辨识外加噪声的模型. 最后给出算法实现及仿真结果.

二、对 消 原 理

设有单输入单输出的离散线性动态系统

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t), \tag{1}$$

本文于1989年12月19日收到.

1) 国家自然科学基金资助课题. 本文曾在1989年全国控制理论与应用学术交流会上宣读.

其中 $y(t)$, $u(t)$ 分别为输出和输入. $e(t)$ 为与 $u(t)$ 不相关的零均值噪声, q^{-1} 是后移算子, $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 为

$$A(q^{-1})=1+a_1q^{-1}+\cdots+a_nq^{-n},\quad B(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}+\cdots+b_mq^{-m}. \tag{2}$$

对输入进行预滤波

$$F(q^{-1})u_f(t)=u(t), \tag{3}$$

其中

$$F(q^{-1})=1+f_1q^{-1}+\cdots+f_rq^{-r},\quad r\leqslant n, \tag{4}$$

经过滤波后的 $u_f(t)$ 仍然与 $e(t)$ 不相关. 根据式(1—4)有

$$y(t)=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}F(q^{-1})u_f(t)+\frac{1}{A(q^{-1})}e(t). \tag{5}$$

由式(5)可以看出,若调整 $F(q^{-1})$ 的参数,使其与 $A(q^{-1})$ 的部分或全部对消,则 $u_f(t)$ 和 $y(t)$ 的相关特性就将改变, 利用这一点就可以辨识 $A(q^{-1})$ 及其因子,这就是对消辨识原理.

用相关分析方法来寻找对消发生的特征. 首先取 $r=n$ ($r<n$ 的情形是类似的,将在下节介绍),分解下式

$$B(q^{-1})[F(q^{-1})/A(q^{-1})-1]=B_1(q^{-1})+q^{-m}B_2(q^{-1}), \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}B_1(q^{-1})&=b_0^1+b_1^1q^{-1}+\cdots+b_m^1q^{-m},\\ B_2(q^{-1})&=b_1^2q^{-1}+\cdots+b_i^2q^{-i}+\cdots,\end{aligned} \tag{7}$$

于是式(5)可改写为

$$y(t)=B(q^{-1})u_f(t)+B_1(q^{-1})u_f(t)+B_2(q^{-1})u_f(t-m)+w(t), \tag{8}$$

这里 $w(t)=e(t)/A(q^{-1})$ 仍为零均值,与 $u_f(t)$ 不相关的噪声. 由上式可得

$$\begin{aligned}E[y(t)|u_f(t,t-m)]=&B(q^{-1})u_f(t)+B_1(q^{-1})u_f(t)\\ &+E[B_2(q^{-1})u_f(t-m)|u_f(t,t-m)],\end{aligned} \tag{9}$$

这里 $u_f(t,t-m)=[u_f(t),\cdots,u_f(t-m)]^T$, $E(X|Y)$ 表示 X 关于 Y 的条件数学期望. 如果 $E(X|Y)$ 表示 X 关于 Y 的线性期望(即 X 基于 Y 的最佳线性估计),那么式(9)也成立. 如果 X 与 Y 服从联合高斯分布,则二者是相同的. 由式(8)和式(9)得

$$\begin{aligned}y(t)-E[y(t)|u_f(t,t-m)]=&B_2(q^{-1})u_f(t-m)\\ &-E[B_2(q^{-1})u_f(t-m)|u_f(t,t-m)]+w(t),\end{aligned} \tag{10}$$

由于 $w(t)$ 与 $u_f(t)$ 不相关,因此有

$$\begin{aligned}&E\{y(t)-E[y(t)|u_f(t,t-m)]\}^2\\ &=E\{B_2(q^{-1})u_f(t-m)-E[B_2(q^{-1})u_f(t-m)|u_f(t,t-m)]\}^2\\ &\quad+Ew(t)^2\geqslant Ew(t)^2.\end{aligned} \tag{11}$$

当且仅当 $F(q^{-1})=A(q^{-1})$ 时, $B_2(q^{-1})=0$, 此时

$$E\{y(t)-E[y(t)|u_f(t,t-m)]\}^2=\min. \tag{12}$$

(12)式即是对消产生的结果. 按这一特征利用相关分析就得到 $A(q^{-1})$ 的系数的估计

$$A=\arg\min_F E\{y(t)-E[y(t)|u_f(t,t-m)]\}^2, \tag{13}$$

这里 $A=[a_1,\cdots,a_n]^T$, $F=[f_1,\cdots,f_n]^T$. 根据最佳线性估计理论[11]

$$E[y(t)|u_f(t,t-m)] = Ey(t) + E[y(t)u_f^T(t,t-m)] \cdot \{E[u_f(t,t-m)u_f^T(t,t-m)]\}^{-1}[u_f(t,t-m) - Eu_f(t,t-m)], \tag{14}$$

对 (13) 式应用非线性规划即可得到 A 的估计[10]. 不妨设 $Eu(t)=0$，因为对于线性系统,若 $Eu(t) \neq 0$，可以预先减去 $y(t)$，$u(t)$，$u_f(t)$ 的均值而不会影响计算结果. 当对消发生时 $E[y(t)|u_f(t,t-m)]$ 中 $u_f(t,t-m)$ 的系数正好是 $B=[b_1,\cdots,b_m]^T$ 的估计,即

$$\hat{B}^T = E[y(t)u_f^T(t,t-m)]\{E[u_f(t,t-m)u_f^T(t,t-m)]\}^{-1}. \tag{15}$$

以上 A, B 是分别求得的,要处理的向量维数最大为 n, 而不是 $n+m$.

三、传递函数因子的辨识

在某些情况下并不一定需要辨识完整的 $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$，常常只需跟踪某一主要极点的变化. 利用对消原理也可以辨识传递函数的因子. 设

$$A(q^{-1}) = (1+\alpha_1 q^{-1} + \cdots + \alpha_r q^{-r})A'(q^{-1}),\quad r<n, \tag{16}$$

类似于上一节的推导,当 $F(q^{-1})$ 与上式中的 r 阶因子对消时有

$$E\{y(t) - E[y(t)|y(t-1,t+r-n),\ u_f(t,t-m)]\}^2 = \min, \tag{17}$$

这里 $y(t-1,t-n+r) = [y(t-1),\cdots,y(t-n+r)]^T$. 如需辨识 $A(q^{-1})$ 的一个二阶环节 $(1+\alpha_1 q^{-1}+\alpha_2 q^{-2})$，则可取 $r=2$，$F(q^{-1}) = 1+\alpha_1^f q^{-1} + \alpha_2^f q^{-2}$，即得

$$\begin{bmatrix}\hat{\alpha}_1\\ \hat{\alpha}_2\end{bmatrix} = \arg\min_{(\alpha_1^f,\alpha_2^f)^T} E\{y(t) - E[y(t)|y(t-1,t-n+2),u_f(t,t-m)]\}^2. \tag{18}$$

可以采用多个平行的滤波器,分别与不同的因子对消,即可同时辨识出系统的多个极点. 这样就可把一个高维矩阵的运算化为多个低维矩阵运算之和.

四、CARMA 模型的辨识

设有 CARMA 模型

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t), \tag{19}$$

其中 $C(q^{-1}) = 1+c_1 q^{-1} + \cdots + c_l q^{-l}$; $A(q^{-1})$、$B(q^{-1})$ 同式 (2); $e(t)$ 为零均值白噪声序列. 无须知道 $C(q^{-1})$，即可用第二节中的方法辨识 $A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$. 在 A, B 已知的条件下可以用对消原理来辨识 $C=(c_1,\cdots,c_l)^T$. 对输入输出进行相同的预处理

$$F(q^{-1})u_f(t) = u(t),\quad F(q^{-1})y_f(t) = y(t), \tag{20}$$

这里 $F(q^{-1}) = 1+f_1 q^{-1} + \cdots + f_l q^{-l}$. 由此可得到

$$A(q^{-1})y_f(t) - B(q^{-1})u_f(t) = C(q^{-1})e(t)/F(q^{-1}). \tag{21}$$

当且仅当 $F(q^{-1}) = C(q^{-1})$ 时有

$$E[A(q^{-1})y_f(t) - B(q^{-1})u_f(t)]^2 = \min, \tag{22}$$

于是得到 C 的估计如下:

$$\hat{C}=\underset{[f_1,\cdots,f_l]^T}{\arg\min} E[A(q^{-1})y_f(t)-B(q^{-1})u_f(t)]^2. \tag{23}$$

五、算法的实现及仿真

本文所述的方法可通过最优化计算方法来实现. 现以实现第二节中的算法为例，说明用对消原理进行辨识的实现过程. 取目标函数

$$L=\frac{1}{N-k+1}\sum_{t=k}^{N}[y(t)-E(y(t)|u_f(t,t-m))]^2, \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}&E[y(t)|u_f(t,t-m)]\\&\quad=E[y(t)u_f^T(t,t-m)]\{E[u_f(t,t-m)u_f^T(t,t-m)]\}^{-1}u_f(t,t-m).\end{aligned} \tag{25}$$

记 $m+1$ 维向量 R 为

$$R^T=E[y(t)u_f^T(t,t-m)]\{E[u_f(t,t-m)u_f^T(t,t-m)]\}^{-1}, \tag{26}$$

可按下式计算 R 的估计值

$$\begin{aligned}\hat{R}^T&=\left[\frac{1}{N-k+1}\sum_{t=k}^{N}y(t)u_f^T(t,t-m)\right]\\&\quad\times\left[\frac{1}{N-k+1}\sum_{t=k}^{N}u_f(t,t-m)u_f^T(t,t-m)\right]^{-1}\\&=Y^TU_f(U_f^TU_f)^{-1},\end{aligned} \tag{27}$$

这里

$$\begin{aligned}Y^T&=[y(k),y(k+1),\cdots,y(N)]\in R^{1\times(N-k+1)},\\U_f^T&=[u_f(k,k-m),\cdots,u_f(N,N-m)]\in R^{(m+1)\times(N-k+1)}.\end{aligned} \tag{28}$$

于是

$$L=\frac{1}{N-k+1}\sum_{t=k}^{N}[y(t)-\hat{R}^T\cdot u_f(t,t-m)]^2. \tag{29}$$

为了求 L 关于 F 的梯度，首先考虑 $\partial u_f(t)/\partial f_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 在 (3) 式两端对 f_i 求导可得

$$q^{-i}u_f(t)+F(q^{-1})\partial u_f(t)/\partial f_i=0, \tag{30}$$

由此得到

$$\partial u_f(t)/\partial f_i=-u_f(t-i)/F(q^{-1}),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{31}$$

记 $V\triangleq(U_f^TU_f)^{-1}$，由式 (27) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{R}^T}{\partial f_i}&=\left(Y^T\frac{\partial U_f}{\partial f_i}\right)V-(Y^TU_f)V\left(\frac{\partial U_f^T}{\partial f_i}U_f+U_f^T\frac{\partial U_f}{\partial f_i}\right)V\\&=Y^T\frac{\partial U_f}{\partial f_i}V-\hat{R}^T\left(\frac{\partial U_f^T}{\partial f_i}U_f+U_f^T\frac{\partial U_f}{\partial f_i}\right)V,\quad i=1,\cdots,n.\end{aligned} \tag{32}$$

于是得到 L 关于 F 的梯度如下：

$$\frac{\partial L}{\partial f_i}=\frac{-2}{N-k+1}\sum_{t=k}^{N}(y(t)-\hat{R}^T\cdot u_f(t,t-m))\cdot\left(\frac{\partial\hat{R}^T}{\partial f_i}u_f(t,t-m)+\hat{R}^T\cdot\frac{\partial u_f(t,t-m)}{\partial f_i}\right),\ i=1,\cdots,n. \tag{33}$$

通过上述公式即可求得目标函数 L 及其梯度值，任何最优化计算方法均可用来求 L 的极小值，从而得到 A 的辨识．进一步由 (15) 式可以得到 B 的估计．其它算法的实现是类似的，不再赘述．

仿真例子． 构造如下 CARMA 模型：

$$(1+a_1q^{-1}+\cdots+a_nq^{-n})y(t)=(b_0+b_1q^{-1}+\cdots+b_mq^{-m})u(t)+(1+c_1q^{-1}+\cdots+c_lq^{-l})e(t), \tag{34}$$

其中 $u(t)$，$e(t)$ 为互不相关的，强度分别为 Q，R 的零均值白噪声序列．用上面算法所得的结果见表 1．当 A，B 辨识出来后，即可用 (23) 式来辨识 C，结果亦见表 1．

表 1　传递函数的辨识

	$n=2,\ m=3$ $Q/R=5$ $N=2000$		$n=2,\ m=1$ $Q/R=10$ $N=2000$		$n=2,\ m=2$ $Q/R=100$ $N=2000$	
	true	estimate	true	estimate	true	estimate
$a1$	1.2	1.20026	1.5	1.50587	1.8	1.79910
$a2$	0.35	0.350482	0.7	0.707904	0.81	0.80917
$b0$	1.0	1.00547	1.0	1.00111	1.0	1.01414
$b1$	2.0	2.00721	0.5	0.509532	2.0	2.00439
$b2$					0.0	−0.0148
$c1$	1.2	1.20471	−1.0	−0.994351	0	
$c2$	0.35	0.35839	0.2	1.98688	0	

最后还仿真了传递函数因子的辨识，考虑下面由两个二阶振荡环节构成的四阶系统

$$(1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2})(1+b_1q^{-1}+b_2q^{-2})y(t)=u(t). \tag{35}$$

这里 $\{u(t)\}$，$\{e(t)\}$ 同上．用 (18) 式辨识的结果见表 2．以上仿真结果是令人满意的，说明了本文所提方法的有效性．

表 2　传递函数因子的辨识

	$Q/R=100$ $N=1000$		$Q/R=10$ $N=500$		$Q/R=5$ $N=200$	
	true	estimate	true	estimate	true	estimate
$a1$	1.0	1.002290	0.4	0.395469	1.5	1.494410
$a2$	0.41	0.411790	0.13	0.123383	0.7	0.698802
$b1$	1.0	1.002150	1.6	1.599450	−1.0	−.991125
$b2$	0.51	0.511443	1.0	0.999356	0.41	0.369942

六、结　论

本文提出的辨识传递函数的方法有以下特点：

1）可分别辨识传递函数的分子和分母，因此能够降低要处理矩阵的维数，较易避免矩阵运算的病态问题；

2）可以辨识系统传递函数中的因子，这对工程应用很有益。若采用并行分别辨识各因子的办法，还可以加快计算速度；

3）此法在辨识传递函数时，不需要对噪声进行建模。相反在辨识出传递函数以后可以进一步辨识噪声模型；

4）由于传递函数的分子和分母是分别辨识的，此法显然适用于非最小相位系统。这种方法是基于对消原理，因此也可推广到连续系统的辨识。

本文方法也存在不足之处，例如，与最小二乘法比较，算法要繁一些；要求输入输出不相关，不能用于闭环辨识。

参 考 文 献

[1] Ljung, L., On The Estimation Of Transfer Function, *Automatica*, **21**(1985), 677—696.

[2] Ljung, L., Asymptotic Variance Experience For Identified Black-box Transfer Function Models, *IEEE Trans.*, **AC-30**(1985), 834—844.

[3] Ljung, L. and Yuan, Z. D., Asymptotic Properties Of Black-box Identification of Transfer Function, *IEEE Trans.*, **AC-30**(1985), 541—553.

[4] Yuan, Z. D. and Ljung, L., Black-box Identification of Multivariable Transfer Function: Asymptotic Properties And Optimal Input Design, *Int. J. Control*, **40**(1984), 233—256.

[5] 冯纯伯、郑卫新、刘 兵，系统参数估算的偏差补偿最小二乘法，控制与决策，**1**(1986)，2—8.

[6] Liu, B. and Feng, C. B., Piecewise Identification of Frequency Charactristic of Dynamic Systems, In C. I. Byrnes and A. Lindquist (Eds.). Modelling, Identification and Robust Control. Amsterdam, North-holland, (1986), 605—614.

[7] Feng, C. B. and Zhang, W. X., On Line Modified Least-square Parameter Estimation Of Linear Systems With Input-output Data Polluted By Measurewment Noise. Proc. of 8th IFAC/IFROS Symposium on Identification and System Parameter Estimation. **2**(1988), 1189—1194.

[8] Zheng, W. X. and Feng, C. -B., Unbised Parameter Estimation of Linear System In The Presence of Input and Output Noise. *Int. J. Of Adaptive Control and Signal Processing*, **3**(1989), 231—251.

[9] Zheng, W. X. and Feng, C. -B., Identification o Stochastic Time Lag System In The Presence Of Colored Noise, *Automatica*, **7**(1990).

[10] 冯纯伯，应用非线性规划辨识线性系统，中国科学，A辑，**12**(1983)，1133—1143.

[11] Frank, L. Lewis, Optimal Estimation, John Wiley & Sons, Inc., (1986).

THE IDENTIFICATION OF TRANSFER FUNCTION THROUGH CANCELLATION PRINCIPLE

Feng Chunbo Zhao Yong

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing)

ABSTRACT

A new method of identifying transfer function is presented. It is realized through introducing prefilter to the input signal and adjusting the parameters of the prefilter so as to cancel some parts of the transfer function. This method can be used to estimate the numerator, denominator and the factors of the transfer function separately. It need not to model the noise and it can also be used to identify the error model.

Key words: System identification; identification of transfer function; prefiltering; cancellation.