第 17 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 3
1991 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1991

连续诱导策略设计的新方法:隐函数法

徐 春 暉
(华中理工大学系统工程研究所,武汉)

关键词: 对策, Stackelberg 对策,诱导策略.

一、引 言

诱导问题的基本要素可记为

$\boldsymbol{u}, U\subset R^m$:上级的决策变量与决策空间,

$\boldsymbol{v}, V\subset R^n$: 下级的决策变量与决策空间,

$J_0(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, $J_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$:上下级的代价目标函数,

$(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{u}^t)\in U\times V$: 上级的期望结局,

Γ:上级的容许策略类.

诱导问题可表达为: 寻找策略 $r\in\Gamma$,使得 $\arg\{\min J_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):\ \boldsymbol{u}=r(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}\in V\}=\boldsymbol{v}^t$, 且 $r(\boldsymbol{v}^t)=\boldsymbol{u}^t$.

满足此关系的 r 称为 $(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t)$ 处的诱导策略 (IS:Incentive Strategy). 若 $r: V\to U$ 是连续映射,则称 r 为连续 IS.

IS 的存在性取决于 J_1 的性质和对 Γ 的限制[1,2,3]. 当 J_1 在 $U\times V$ 上是凸函数时, [2,3]证明了 IS 的存在性并提出了设计 IS 的方法. 本文研究 J_1 为一般连续函数时连续 IS 的存在性和设计方法.

二、连续诱导策略存在性与设计方法

记 $\boldsymbol{u}^k=(u_1,\cdots,u_{k-1},u_{k+1},\cdots,u_m)$,

$\boldsymbol{u}^{kt}=(u_1^t,\cdots,u_{k-1}^t,u_{k+1}^t,\cdots,u_m^t)$, $1\leqslant k\leqslant m$.

定理. 设 J_1 为连续函数, $z\in R^1$,若由方程 $J_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=z$, 可解出 $u_k=T(\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{v},z)$, 且 $T(\cdot)$: $R^{m-1}\times V\times R^1\to R^1$ 是连续函数,则在任意 $(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t)\in U\times V$ 处存在连续 IS.

证明. 在 $(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t)$ 处不难构造连续函数 $r_i(\boldsymbol{v})$,使得

$$r_i(\boldsymbol{v}^t)=u_i^t,\ i=1,\cdots,m,\ i\neq k. \tag{1}$$

令 $u_i=r_i(\boldsymbol{v})$, $i=1,\cdots,m$, $i\neq k$, 记为 $\boldsymbol{u}^k=r^k(\boldsymbol{v})$.

本文于 1989 年 3 月 6 日收到.

方程 $J_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=z$ 可改写为

$$J_1(u_k,\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{v})=z, \tag{2}$$

由于 $u_k=T(\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{v},z)$ 是从式(2)解出来的，将 $\boldsymbol{u}^k=r^k(\boldsymbol{v})$，$u_k=T(\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{v},z)$ 代入式(2)得

$$J_1(T(r^k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v},z),r^k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v})=z,\ \forall z\in R^1,\ \boldsymbol{v}\in V. \tag{3}$$

也不难构造连续函数 $J(\boldsymbol{v})$ 满足

$$\arg\{\min J(\boldsymbol{v}):\boldsymbol{v}\in V\}=\boldsymbol{v}^t,\ J(\boldsymbol{v}^t)=J_1(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t). \tag{4}$$

将式(3)中的 z 用满足式(4)的 $J(\boldsymbol{v})$ 代替,则有

$$J_1(T(r^k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v},J(\boldsymbol{v})),r^k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v})=J(\boldsymbol{v}),\ \forall\boldsymbol{v}\in V. \tag{5}$$

由(4),(5)二式可知

$$\arg\{\min J_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\ \boldsymbol{u}^k=r^k(\boldsymbol{v}),u_k=T(r^k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v},J(\boldsymbol{v})),\boldsymbol{v}\in V\}=\boldsymbol{v}^t. \tag{6}$$

当 $T(\cdot)$ 是单值函数时，令 $r_k(\boldsymbol{v})=T(r^k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v},J(\boldsymbol{v}))$,因为 $J(\boldsymbol{v}^t)=J_1(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t)$，所以 $u_k^t=r_k(\boldsymbol{v}^t)$.

当 $T(\cdot)$ 是多值函数时,因为 $J(\boldsymbol{v}^t)=J_1(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t)$,所以 $T(\cdot)$ 的多个分支中必有一个分支满足 $u_k^t=T(r^k(\boldsymbol{v}^t),\boldsymbol{v}^t,J(\boldsymbol{v}^t))$,令此分支为 $r_k(\boldsymbol{v})$，则 $u_k^t=r_k(\boldsymbol{v}^t)$.

记 $r(\boldsymbol{v})=(r_1(\boldsymbol{v}),\cdots,r_m(\boldsymbol{v}))$，则有

$$r(v^t)=u^t. \tag{7}$$

由式(6),式(7)可知: $r(\boldsymbol{v})$ 是 $(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t)$ 处的连续 IS.

以上的证明是一种构造式证明,在证明中已提出了一种设计连续 IS 的方法,其步骤如下:

1) 选择 $\boldsymbol{u}$ 的某个分量作为 u_k，将 $\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{v},z$ 看作参数，求解方程 $J_1(u_k,\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{v})=z$，得 $u_k=T(\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{v},z)$，若 $T(\cdot)$: $R^{m-1}\times V\times R^1\to R^1$ 是连续函数，则在任意 $(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t)\in U\times V$ 处存在连续 IS.

2) 对给定的 $(\boldsymbol{u}^t,\boldsymbol{v}^t)$,选择连续函数 $r_i(\boldsymbol{v})$,使得 $u_i^t=r_i(\boldsymbol{v}^t)$，$i=1,\cdots,m$，$i\neq k$. 令 $u_i=r_i(\boldsymbol{v})$，$i=1,\cdots,m$，$i\neq k$，记为 $\boldsymbol{u}^k=r^k(\boldsymbol{v})$. 取另一满足式(4)的连续函数 $J(\boldsymbol{v})$.

3) 当 $T(\cdot)$ 是单值函数时，令 $r_k(\boldsymbol{v})=T(r^k(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v},J(\boldsymbol{v}))$；当 $T(\cdot)$ 是多值函数时,取一个在 $\boldsymbol{u}^k=\boldsymbol{u}^{kt}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^t$，$z=J(\boldsymbol{v}^t)$ 处值为 u_k^t 的分支作为 $r_k(\boldsymbol{v})$. 令 $u_k=r_k(\boldsymbol{v})$,则 $\boldsymbol{u}=r(\boldsymbol{v})=(r_1(\boldsymbol{v}),\cdots,r_m(\boldsymbol{v}))$ 是处的连续 IS.

注 1. 以上方法的关键是求出 $T(\cdot)$,这涉及到隐函数的显式化，因此以上方法也就称为隐函数法. 一般情况下大范围隐函数的存在性问题[4]比较复杂，但这里所碰到的情况较简单,求 $T(\cdot)$ 不会太困难.

注 2. 隐函数法的灵活性体现在三次选择上：选择 $\boldsymbol{u}$ 的分量 u_k，连续函数 $r^k(\boldsymbol{v})$ 和 $J(\boldsymbol{v})$. 作这些选择时有较大的灵活性和技巧性.

u_k 的选择要有利于 $T(\cdot)$ 的求解. 下面例子中若取 $u_k=u_1$,则从 $J_1(\boldsymbol{u},v)=z$ 中很难求出 $u_1=T(u_2,v,z)$.

$r^k(\boldsymbol{v})$ 只要满足式(1)即可,因而相当灵活. 最简单的方法是取 $r^k(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}^{kt}$.

$J(\boldsymbol{v})$ 的选择也相当灵活. 一种简单的方法是取 $J(\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^t)^TA(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}^t)+$

$J_1(\boldsymbol{u}^t, \boldsymbol{v}^t)$，$A$ 是正定矩阵。

例. $J_1(u_1, u_2, v) = e^{u_1} + u_1 v - u_2 v - v^2$，$U \subset R^2$，$V \subset R_+^1$，$(u^t, v^t) = (1, 2, 1)$，取 $u_k = u_2$，$r_1(\cdot) = u_1 = 1$，$J(v) = (v-1)^2 + J_1(\boldsymbol{u}^t, v^t) = (v-1)^2 + e - 2$。求解 $J_1(u_1, u_2, v) = J(v)$，得 $u_2 = (-2v^2 + 3v + 1)/v$。

因此下面策略是(1,2,1)处的一个连续 IS：

$$u_1 = 1,$$
$$u_2 = (-2v^2 + 3v + 1)/v.$$

参　考　文　献

[1] Ho, Y. C., Luh, P. B., Olsder, G. J., A Control-theoretic View on Incentives, *Automatica*, **18** (1982), 1, 167—179.

[2] Zheng, Y. P., Basar, T., Existence and Derivation of Optimal Affine Incentive Schemes for Stackelberg Games with Partial Information, A Geometric Approach, *Int. J. of Control*, **35**(1982), 6, 997—1011.

[3] 曾晓军，鼓励性策略的存在与构造，控制与决策，1988，第一期，45—47.

[4] 陈文源等，隐函数定理，兰州大学出版社，1986.

A NEW DESIGN METHOD OF CONTINUOUS INCENTIVE STRATEGIES: THE IMPLICIT FUNCTION METHOD

Xu Chunhui

(Institute of Systems Engineering, Huazhong Univ. of Sci. & Tech.)

Key words: Game; Stackelberg game; incentive strategies.