第17卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 3
1991 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1991

基于主导能量分析的模型降阶方法

章卫国 薛璞
(西北工业大学,西安)

关键词: 主导能量,模型,特征根.

一、引言

模型简化是高阶系统分析与设计中的一个重要问题. 近年来,许多国内外学者提出了不少模型降阶方法. 按系统各模态对输出的能量贡献来确定主导特征根的降阶方法[1]就是其中之一,文献[2]将其推广到多变量的情形. 这一方法计算简单,可保证降阶模型的稳定性,但目前只讨论了系统特征根均为单根的情况. 本文将文献[1]做了推广,对含重特征根的系统提出了一种模型降阶方法.

二、系统含重特征根时,主导特征根的确定

1. 连续系统

不失一般性,设 n 阶系统有一对重特征根为 $\mu_n=\mu_{n-1}$,其传递函数为

$$G(s)=\frac{A_{21}+A_{22}s+\cdots+A_{2n}s^{n-1}}{A_{11}+A_{12}s+\cdots+A_{1n}s^{n-1}+A_{1,n+1}s^n}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i}{s-\mu_i}+\frac{h_n}{(s-\mu_{n-1})^2}, \quad (1)$$

系统的脉冲响应为

$$g(t)=\sum_{i=1}^{n-1}h_i\exp(\mu_i t)+h_n t\exp(\mu_{n-1}t). \quad (2)$$

当输入 $z(t)$ 为白噪声时,$E(z(t)z(t-\tau)]=\sigma_2^2\delta(\tau)$,系统的输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}g(t-t')z(t')dt'=\int_0^\infty g(\theta)z(t-\theta)d\theta, \quad (3)$$

这样 $y(t)$ 的自相关函数为

$$\gamma(\tau)=E[y(t)y(t-\tau)]=\sigma_2^2\int_0^\infty g(\theta)g(\tau+\theta)d\theta. \quad (4)$$

考虑到式(2),得到

$$\gamma(\tau)=\sum_{i=1}^{n-2}d_i\exp(\mu_i\tau)+d_{n-1}(\tau)\exp(\mu_{n-1}\tau), \quad (5)$$

其中

本文于1988年9月8日收到.

$$\begin{cases} d_j = \sigma_2^2\left[\dfrac{h_n h_j}{(\mu_j+\mu_{n-1})^2}+\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{h_i h_j}{-(\mu_i+\mu_j)}\right],\ j=1,2,\cdots n-2, \\ d_{n-1}(\tau) = \sigma_2^2\left[\dfrac{h_n h_{n-1}}{4\mu_{n-1}^2}+\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{h_i h_{n-1}}{-(\mu_i+\mu_{n-1})}\right]+\sigma_2^2\left[\dfrac{h_n^2(\mu_{n-1}\tau-1)}{4\mu_{n-1}^3}\right. \\ \qquad\left.+h_n\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{h_i-h_i\tau(\mu_i+\mu_{n-1})}{(\mu_i+\mu_{n-1})^2}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

当输入是白噪声时，$|d_j|$可反映第 j 个模态对系统输出 $y(t)$ 的能量贡献。

定义一个相对能量指标为

$$D_j=\frac{d_j}{|d_1|+|d_2|+\cdots+|d_{n-1}(0)|},\quad j=1,2,\cdots n-1, \tag{7}$$

D_j 可用来衡量第 j 个模态在输出能量中所占的比例。根据 D_j 的大小，就可确定系统的主导特征根，从而确定降阶模型的阶次及相应的特征多项式，再结合 Padé 逼近法[3]就可得到降阶模型。

2. 离散系统

设 n 阶离散系统有一对重特征根 $\mu_{n-1}=\mu_n$，系统的传递函数为

$$G(z^{-1})=\frac{A_{21}+A_{22}z^{-1}+\cdots+A_{2n}z^{-(n-1)}}{A_{11}+A_{12}z^{-1}+\cdots+A_{1n}z^{-(n-1)}+A_{1,n+1}z^{-n}}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i}{1-\mu_i z^{-1}} + \frac{h_n z^{-1}}{(1-\mu_{n-1}z^{-1})^2}, \tag{8}$$

假定 $\mu_i=e^{\lambda_i T}$，那么

$$G(z^{-1})=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{h_i}{1-e^{\lambda_i T}z^{-1}}+\frac{h_n z^{-1}}{1-e^{\lambda_{n-1}T}z^{-1}}. \tag{9}$$

系统的单位脉冲响应为

$$g(kT)=\sum_{i=1}^{n-1}h_i e^{\lambda_i kT}+h_n k e^{\lambda_{n-1}T(k-1)}, \tag{10}$$

当输入白噪声序列时，输出的自相关函数为

$$\gamma(\tau)=\sigma_z^2\sum_{M=0}^{\infty}g(MT)g(MT+\tau T). \tag{11}$$

考虑到式(10)，则

$$\gamma(\tau)=\sum_{i=1}^{n-2}d_j\mu_j^{\tau}+d_{n-1}(\tau)\mu_{n-1}^{\tau}, \tag{12}$$

其中

$$\begin{cases} d_j=\sigma_z^2\left[\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{h_i h_j}{1-\mu_i\mu_j}+\dfrac{h_n h_j\mu_j}{(1-\mu_j\mu_{n-1})^2}\right],\ j=1,2,\cdots n-2, \\ d_{n-1}(\tau)=\sigma_z^2\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{h_i h_{n-1}}{1-\mu_i\mu_{n-1}}+\dfrac{h_n h_{n-1}\mu_{n-1}}{(1-\mu_{n-1}^2)^2}+\dfrac{h_n^2[1+\mu_{n-1}^2+(1-\mu_{n-1}^2)\tau]}{(1-\mu_{n-1}^2)^3}\right. \\ \qquad\left.+h_n\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{h_i[\mu_i\mu_{n-1}+(1-\mu_i\mu_{n-1})\tau]}{\mu_{n-1}(1-\mu_i\mu_{n-1})^2}\right\}. \end{cases} \tag{13}$$

将 d_i 代入式(7)，便可确定离散系统的主导特征根，再结合 Padé 逼近法，即可得到降阶模型。

上面导出的公式(6)，(7)，(13)对系统特征根均为单根的情形也是适用的(只要将 h_n 置零即可)。

算例. 设某系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{118+562s+217s^2+22s^3}{50+70s+47s^2+2s^3+s^4}=\sum_{i=1}^{3}\frac{h_i}{s-\mu_i}+\frac{h_4}{(s-\mu_4)^2},$$

其中 $\mu_1=1+i$，$\mu_2=1-i$，$\mu_3=-5$，$\mu_4=-5$。$h_1=10+8i$，$h_2=10-8i$，$h_3=2$，$h_4=-1$。由式(6)，(7)可确定主导特征根为 $\mu_1=-1+i$，$\mu_2=-1-i$，再结合 Padé 逼近法确定降阶模型为

$$R(s)=\frac{4.72+20.592s}{2+2s+s^2}.$$

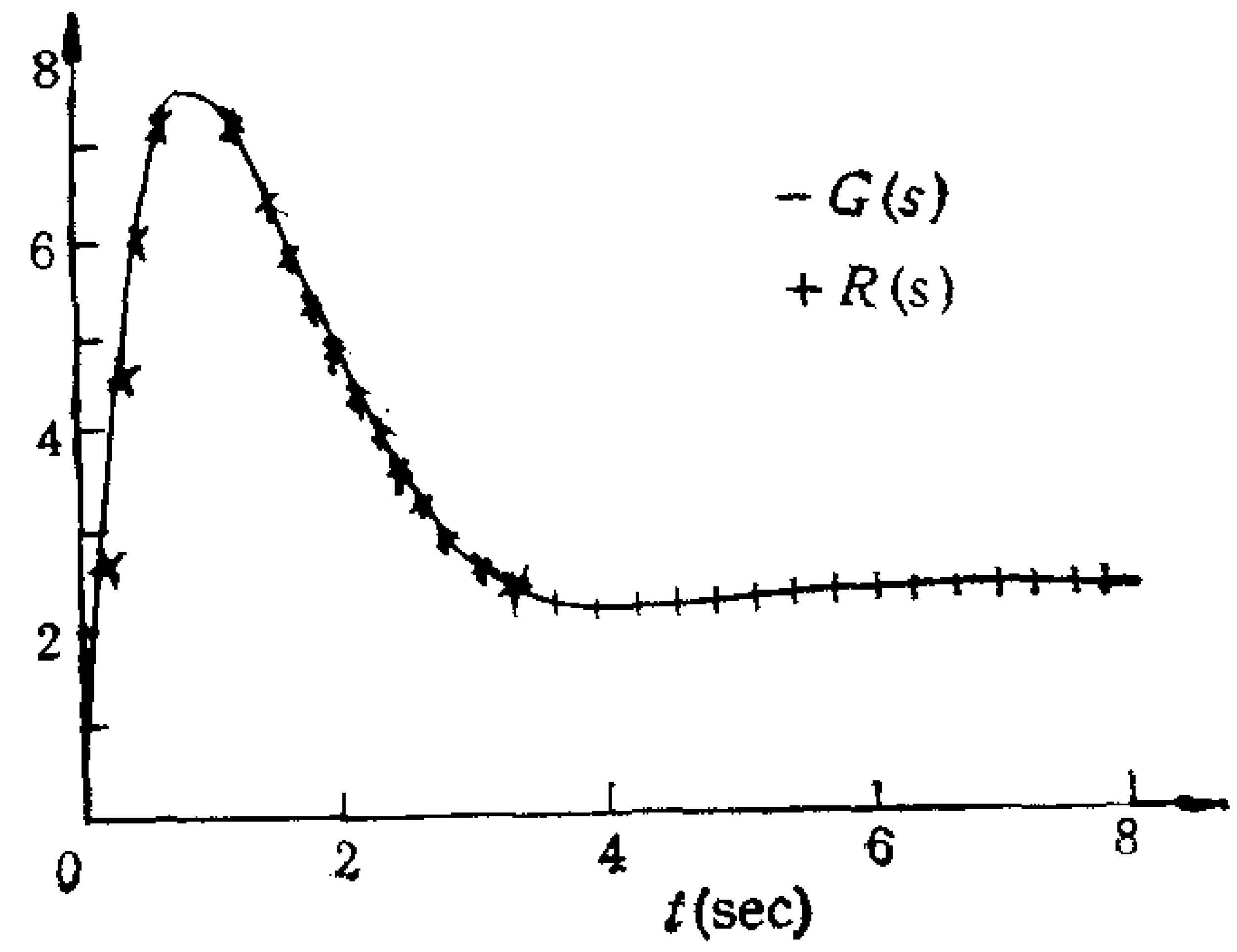

图 1　原系统与降阶模型对阶跃函数的响应

三、结　论

本文对连续系统与离散系统给出了确定主导特征根的依据。所得到的公式可用于特征根均为单根和有重特征根的系统。 文中给出的方法不仅能够保证降阶模型的稳定性，而且降阶模型与原系统具有较高的动态和稳态拟合精度。还有计算简单，便于上机等优点。

参　考　文　献

[1] Liaw, C.M., Pan, C.T. and Chen, Y.C., Reduction of Transfer Functions Using Dispersion Analysis and the Continued Fraction Method, *Int. J. System Sci.*, **17**(1986), 5,807—817.

[2] 胡寿松、章海清，基于主导能量法和 Padé 逼近法的多变量系统的模型简化，南京航空学院学报，(1987)，2，32—39.

[3] Baker, G.A., Essentials of Padé approximants, Oxford, Pergamon Press (1975).

A MODEL REDUCTION METHOD BASED ON DOMINANT ENERGY ANALYSIS

Zhang Weiguo Xue Pu

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

Key words: Dominant energy; model; eigenvalue.