

一类基于 LMK 准则的自适应 格形梯度算法

叶 华 吴伯修

(东南大学无线电工程系,南京)

摘 要

本文将最小平均四次方、最小平均六次方等误差准则延拓到格形结构,提出了一类 LMK 自适应格形梯度算法,文中分析了这类算法的收敛性能,推导出滤波器系数均值、方差的近似表示法和自适应格形滤波器的输出均方误差,计算机模拟结果表明了这类算法的合理性。

关键词: LMK 自适应格形梯度算法。

一、引 言

多数自适应滤波问题,如自适应噪声抵消,自适应系统识别以及自适应信道均衡等都可图 1 表示。它用一个自适用滤波器来识别未知系统,该系统的输出往往迭加了与该系统无关的零均值加性噪声 $n(n)$ 。目前广泛采用的算法是从最小均方误差准则导出的 LMS 算法。采用这种算法的原因是便于分析;而且当系统噪声 $n(n)$ 为白色高斯分布时,最小均方误差准则能得到最大似然估值,但当系统噪声非白色高斯分布时,最小均方误差准则将偏离最大似然估值。但如采用高次方误差准则就能获得较为准确的估值^[1]。

E. Walach 和 B. Widrow 采用最小四次方、六次方等误差准则,推导出一类横向结构的 LMK 梯度算法^[2],并且证明对某些噪声分布特性,高阶 LMK($K > 1$) 算法的收敛

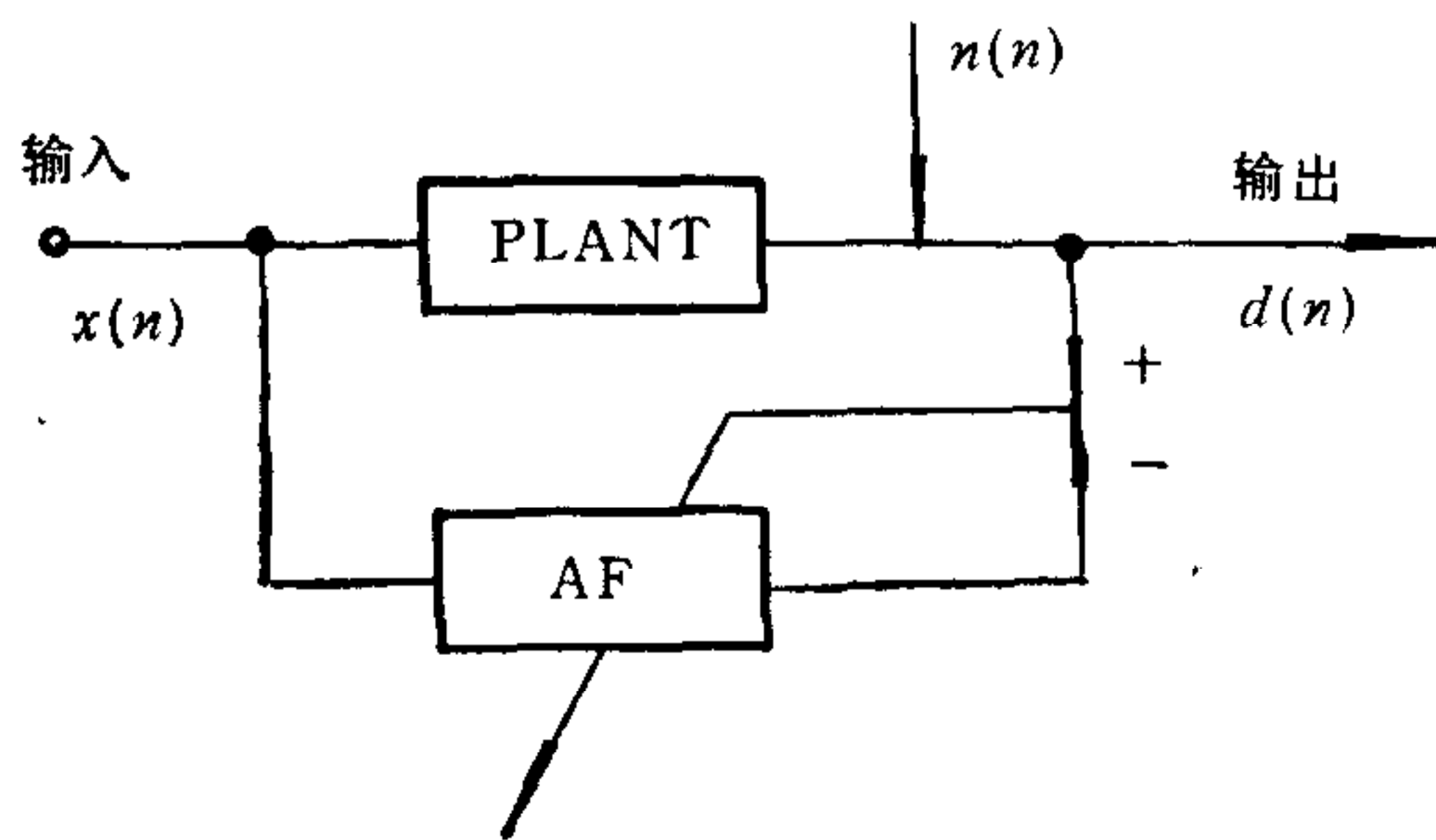


图 1 自适应系统识别的原理框图

性能优于 LMS($K = 1$) 算法。然而,横向结构的 LMK 算法对输入信号特性极为敏感,当输入信号的特征值分布很大时, LMK 算法的收敛速度将变得很慢,这是横向结构梯度自适应算法的通病。解决的途径是采用格形结构的自适应算法。由于格形预测器的各级后向预测误差在自适应调整中逐渐趋于正交,因此如用这样的误差信号作为自适用滤波器的各级输入时,可望算法的收敛性对输入信号特性不敏感。

二、LMK 自适应格形梯度算法

图 2 为自适应系统识别的 N 阶格形滤波器结构。它可以看成一种加格形预测处理的横向滤波器。其中自适应格形预测器仍采用最小均方误差准则。即

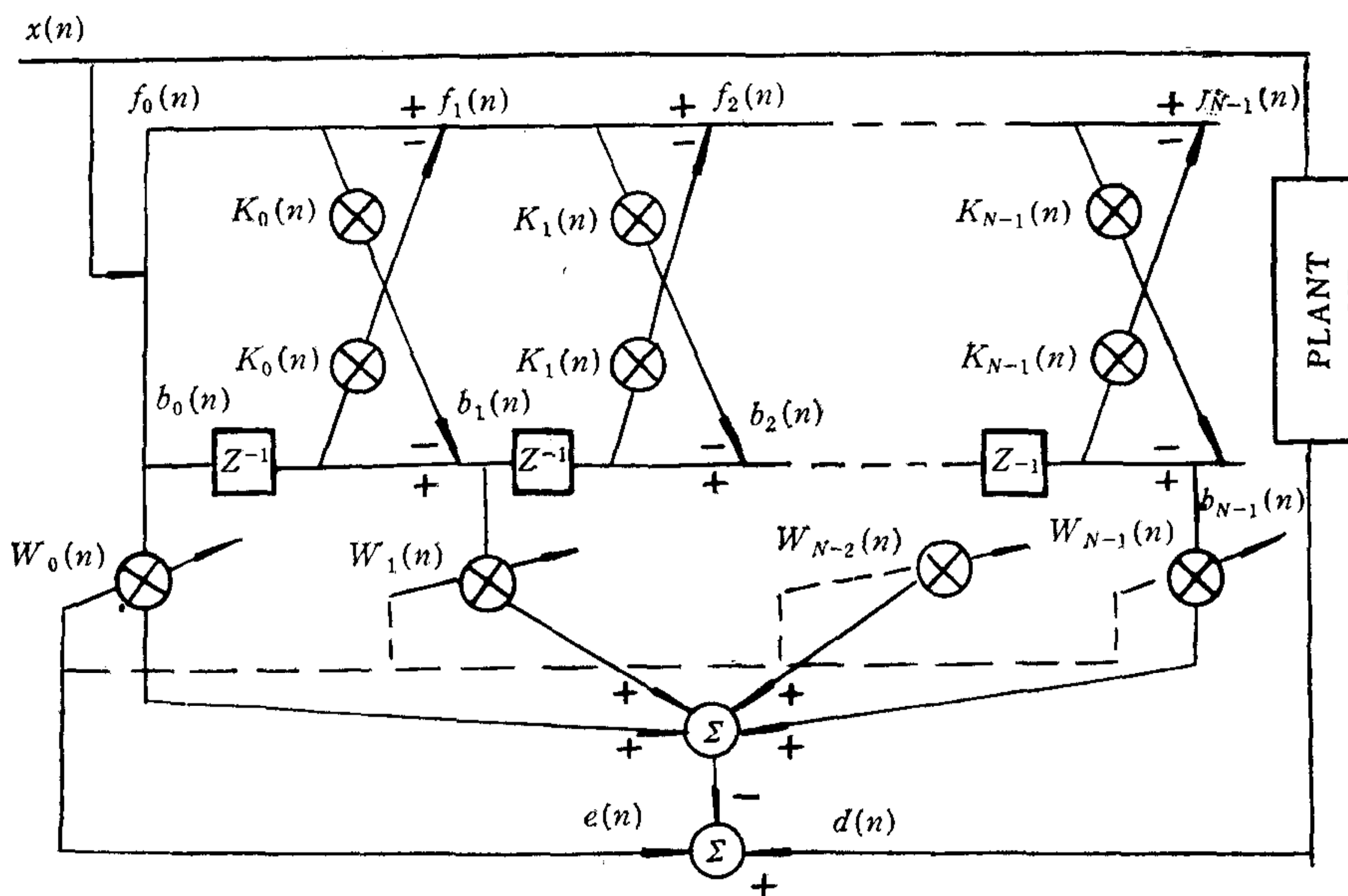


图 2 自适应系统识别的格形滤波器结构

$$\min\{E[f_m^2(n) + b_m^2(n)]\}, m = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \tag{1}$$

其中 $f_m(n)$, $b_m(n)$ 分别为 n 时刻 m 阶的前向和后向预测误差。

自适应格形预测器按下列算法调整:

1) $n = 0$ 时的初始化。

$$K_m(0) = 0, m = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \tag{2}$$

$$E_{m-1}(0) = c, m = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \tag{3}$$

式中 c 为预测误差的方差先验估值。

2) $n = 1, 2, \dots$ 时刻,置

$$(a) f_0(n) = b_0(n) = x(n), \tag{4}$$

(b) $m = 1, 2, \dots, N - 1$ 时,计算

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m(n)b_{m-1}(n-1), \tag{5}$$

$$b_m(n) = b_{m-1}(n-1) + K_m(n)f_{m-1}(n), \tag{6}$$

$$E_{m-1}(n) = (1 - \lambda)E_{m-1}(n-1) + f_{m-1}^2(n) + b_{m-1}^2(n-1), \quad (7)$$

$$K_m(n+1) = K(n) - [f_m(n)b_{m-1}(n-1) + b_m(n)f_{m-1}(n)]/E_{m-1}(n). \quad (8)$$

(c) 自适应“横向”滤波器采用最小 K 阶误差准则 (LMK) 的调整

$$\min\{E[e^{2K}(n)]\}, K = 1, 2, \dots \quad (9)$$

由(9)式可导出调整自适应“横向”滤波器的 LMK 梯度算法

(d) $n = 0$ 时刻的初始化.

$$W_m(0) = 0, m = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$E_m(0) = c/2, m = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

3) $n = 1, 2, \dots$ 时刻, 计算

$$e(n) = d(n) - \sum_{m=0}^{N-1} W_m(n)b_m(n), \quad (10)$$

$$E_m^{(b)}(n) = (1 - \lambda)E_m^{(b)}(n-1) + b_m^2(n), \quad (11)$$

$$\eta_m(n) = \mu/E_m^{(b)}(n), 0 < \mu < 1, \quad (12)$$

$$W_m(n+1) = W_m(n) + 2K\eta_m(n)e^{2K-1}(n)b_m(n). \quad (13)$$

其中 λ 为后向预测误差能量估值的指数加权因子, μ 为步长因子. 自适应算法的收敛速度取决于 μ, λ 及 c 的取值.

三、格形预测器收敛性能的分析

格形预测器收敛性能的分析是在下列近似条件进行的:

1) 格形预测器的系数在 λ 取值很小时, 与输入信号序列是相互独立的.

2) 均值 $E[x(n)/Y(n)]$ 可由 $E[x(n)]/E[y(n)]$ 代替. 当 $x(n), y(n)$ 为二阶统计信号的时间平均, 且 n 足够大时, 此假设基本成立.

3) $f_m(n), b_m(n)$ 误差序列为联合高斯过程.

经一系列推导可得, 预测器系数的均值收敛于最佳解 K^* , 其收敛时间常数为

$$E[K_m(n+1)] = (1 - \lambda)E[K_m(n)] + \lambda K_m^*. \quad (14)$$

式中

$$K_m^* = \frac{-2E[f_{m-1}(n)b_{m-1}(n-1)]}{E[f_{m-1}^2(n) + b_{m-1}^2(n-1)]}.$$

第 m 阶格形预测器的输出均方误差为

$$\varepsilon_m(n) = (1 - 2\lambda + 3\lambda^2)\varepsilon_m(n-1) + 2\lambda(1 - \lambda)\varepsilon_m^{\min}, \quad (15)$$

$$\varepsilon_m^{\min} = (1 - K_m^{*2})\varepsilon_m(n-1). \quad (16)$$

为了保证格形预测器能稳定工作, λ 的取值范围为

$$0 < \lambda < 2/3. \quad (17)$$

均方误差收敛的时间常数为

$$\tau_{\text{MSE}} = -1/\ln(1 - 2\lambda + 3\lambda^2) \doteq 1/2\lambda. \quad (18)$$

第 m 阶格形预测器的稳态均方误差为

$$\varepsilon_m(\infty) = 2(1 - \lambda)\varepsilon_m^{\min}/(2 - 3\lambda). \quad (19)$$

由式(18)和式(19)得知, 格形预测器的收敛速度及稳态均方误差均取决于 λ 值, 当 λ

值较小时, 预测器的收敛速度变慢, 其稳态误差也变小.

四、LMK 格形梯度算法的性能分析

为简化分析并得出有意义的结果, 假定 λ 的取值很小. 因此在分析 LMK 格形梯度算法的收敛性能时, 可忽略由自适应预测器调整系数时所产生的误调误差 (因为 λ 很小时, 预测器输出的稳态均方误差 $\varepsilon_m(\infty) \doteq \varepsilon_m^{\text{min}}$, 故误调误差可忽略不计).

由图 2, n 时刻的系统误差 $e(n)$ 由下式表示:

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \vec{W}(n)^T \vec{B}(n) \\ &= n(n) + \vec{W}^{*T} \vec{B}(n) - \vec{W}^T(n) \vec{B}(n) = n(n) - \vec{V}(n)^T \vec{B}(n). \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$\begin{aligned} \vec{B}^T(n) &= [b_0(n), b_1(n), \dots, b_{N-1}(n)]^T, \\ \vec{W}^T(n) &= [W_0(n), W_1(n), \dots, W_{N-1}(n)]^T, \\ \vec{V}(n) &= \vec{W}(n) - \vec{W}^*. \end{aligned}$$

由(13)式可得

$$\vec{V}(n+1) = \vec{V}(n) + 2K\eta(n)e^{2K-1}(n)\vec{B}(n). \quad (21)$$

式中

$$\eta(n) = \begin{bmatrix} \eta_0(n) & & & 0 \\ & \eta_1(n) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \eta_{N-1}(n) \end{bmatrix},$$

$$E[\eta_m(n)] = \lambda\mu/2E[b_m^2(n)], \quad m = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (22)$$

将(20)式代入(21)式得

$$\begin{aligned} \vec{V}(n+1) &= \vec{V}(n) + 2K\eta(n)\vec{B}(n) \\ &\times \left[\sum_{i=0}^{2K-1} \binom{2K-1}{i} n^i(n) (-\vec{B}^T(n)\vec{V}(n))^{2K-1-i} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

若算法接近收敛, 则可设 $\vec{V}(n) \approx \vec{0}$, 故可略去上式 $\vec{V}(n)$ 高次项得

$$\begin{aligned} \vec{V}(n+1) &= \vec{V}(n) + 2K\eta(n)\vec{B}(n)[n^{2K-1}(n) \\ &\quad - (2K-1)n^{2K-2}(n)\vec{B}^T(n)\vec{V}(n)], \end{aligned} \quad (24)$$

$$E[\vec{V}(n+1)] = \{I - 2K(2K-1)E[\eta(n)]E[n^{2K-2}(n)]E[\vec{B}(n)\vec{B}^T(n)]E[\vec{V}(n)]\}. \quad (25)$$

若自适应预测器已收敛, 则有

$$E[\vec{B}(n)\vec{B}^T(n)] = E \begin{bmatrix} b_0^2(n) & & & 0 \\ & b_1^2(n) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{N-1}^2(n) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

于是(25)式可简化为

$$E[\vec{V}(n+1)] = \{I - K\lambda\mu(2K-1)E[n^{2K-2}(n)]E[\vec{V}(n)]\}. \quad (27)$$

$\vec{w}(n)$ 均值收敛的时间常数为

$$\tau = 1/\{\mu\lambda K(2K-1)E[n^{2K-2}(n)]\} \quad (28)$$

确保 $W(n)$ 均值收敛的条件为

$$0 < \mu\lambda < 2/\{(2K-1)KE[\dot{n}^{2K-2}(n)]\}. \quad (29)$$

由(28)式可得这样的重要结论: 在自适应格形预测器收敛后, LMK 格形梯度算法的收敛时间常数与输入信号的特征分布无关, 而当自适应格形预测器尚未收敛时, 因受格形预测器的处理, 使得各级后向预测误差逐渐趋于正交, 因此 LMK 算法的收敛时间常数对于输入信号的特征分布是不敏感的。

在以上诸假设条件下, 经一系列推导后得到如下的 LMK 格形梯度算法的系数协方差矩阵表示式:

$$E[\vec{V}(m)\vec{V}(n)^T] = \frac{\lambda\mu KE[n^{4K-2}(n)]}{2(2K-1)E[n^{2K-2}(n)]} \\ \times \begin{bmatrix} 1/E[b_0^2(n)] & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1/E[b_{N-1}^2(n)] \end{bmatrix}. \quad (30)$$

稳态时超量均方误差为

$$E[(\vec{V}^T(n)\vec{X}(n))^2] = \frac{\lambda\mu NKE[n^{4K-2}(n)]}{2(2K-1)E[n^{2K-2}(n)]}. \quad (31)$$

由此可见, LMK 梯度算法的稳态超量均方误差与系统噪声 $n(n)$ 的分布特性有密切关系。为了定量地比较 LMK($K > 1$) 算法和 LMS($K = 1$) 算法的性能, 用 $I(K)$ 为尺度。

$$I(K) \triangleq \frac{E[(\vec{V}(n)^T\vec{X}(n))^2]_{K=1}}{E[(\vec{V}(n)^T\vec{X}(n))^2]_{K>1}}, \quad \tau_{K=1} = \tau_{K>1}. \quad (32)$$

这里 $I(K)$ 为 LMK 和 LMS 两种算法的稳态超量均方误差之比。自适应调整步长 μ_{LMS} , 和 μ_{LMK} 应取适当的值, 以便这两种算法的收敛速度相同亦即 $\tau_{K=1} = \tau_{K>1}$ 。

由(31)式、(32)式可得

$$I(K) = \frac{(2K-1)^2 E[n^2(n)] E^2[n^{2K-2}(n)]}{E[n^{4K-2}(n)]}. \quad (33)$$

此式与文献 [1] 中得到的 LMK 横向梯度算法的表示式 $\alpha(K)$ 完全一致。当 $I(K) > 1$ 时, LMK($K > 1$) 格形梯度算法的性能将优于 LMS 格形算法。表 1 列出几种常见噪声分布的 $I(K)$ 值, 其中均匀分布、二值分布和正弦噪声的 $I(K)$ 值都大于 1, 此时采用 LMK($K > 1$) 格形梯度算法将得到优于 LMS 算法的性能。

表 1 几种常见系统噪声分布的 $I(K)$ 值

| | 高斯 | 均匀 | 正弦 | 二值 |
|---------|-----|-----|-----|----|
| $K = 1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $K = 2$ | 0.6 | 2.3 | 3.6 | 9 |

五、计算机模拟

为证实以上分析的结果,采用图 1 的自适用系统识别模型、自适应算法分别为 LMS 和 LMK($K > 1$) 的格形梯度算法,将识别系统为阶数 $N = 10$ 的横向滤波器,其指数加权因子 $\lambda = 0.002$,步长 $\mu_{K=1} = 1/5$, $\mu_{K=2} = 1/30$,进行了计算机模拟。

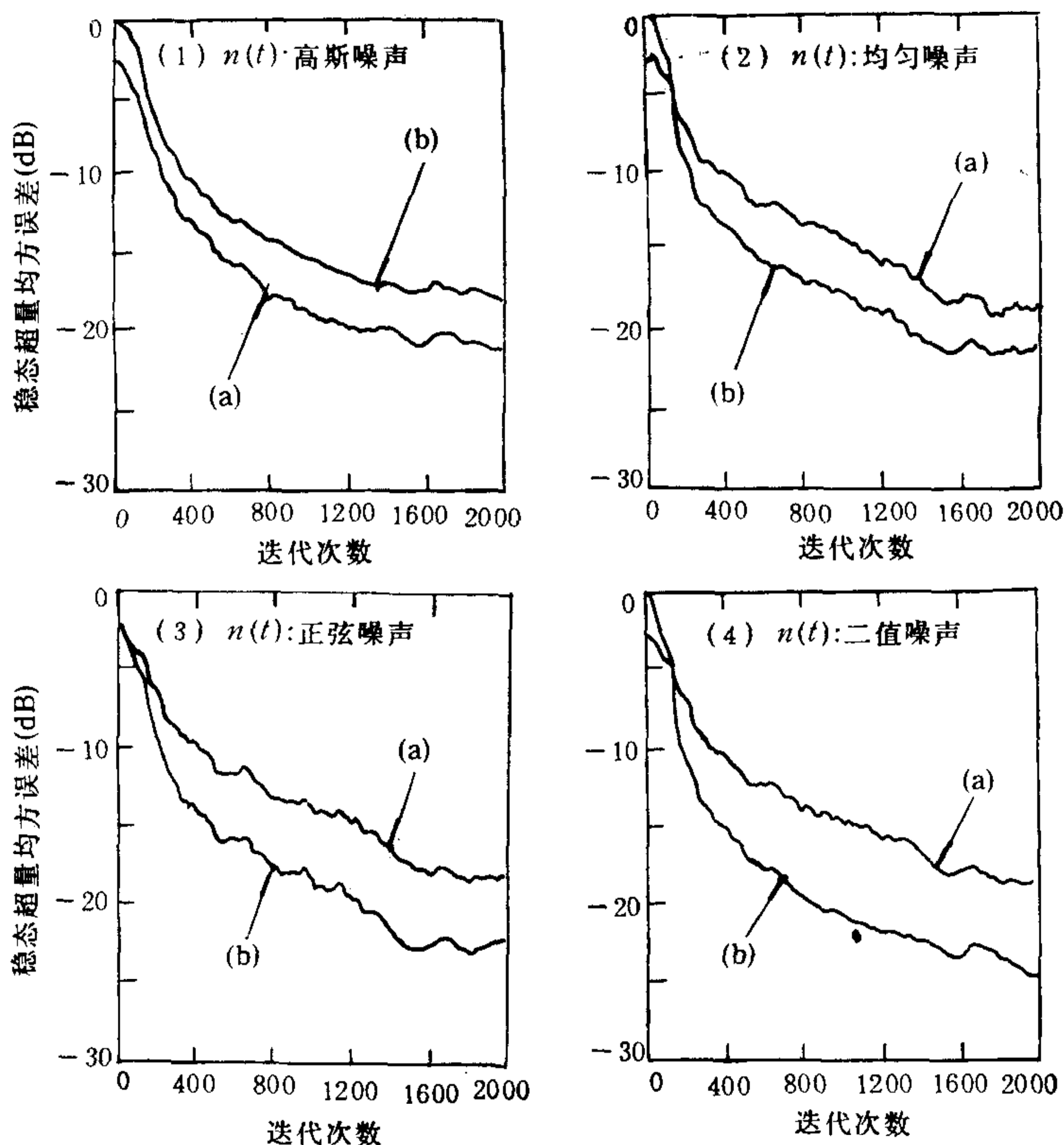


图 3 计算机模拟的收敛曲线

(a) LMS 自适应格形算法的收敛曲线

(b) LMK($K = 2$) 自适应格形梯度算法的收敛曲线

图 3 及图 4 给出了计算机模拟的算法收敛曲线,这些曲线都是经过 10 次独立模拟实验的统计平均。

图 4 为 LMS 及 LMK($K = 2$) 格形梯度算法在不同噪声分布条件下的收敛特性。由此组模拟计算出的 $I(K)$ 值列于表 2。从该表可看出,除了高斯分布噪声采用 LMS 算法优于 LMK 算法外,其余的噪声分布采用 LMK($K = 2$) 算法则优于 LMS 算法。

表 2 中所列 $K = 2$ 时的 $I(K)$ 值都小于表 1 中的值,这是因为我们在第三节的分析中做了一些近似。因此,对于 LMK 算法的性能改善估计就过大了。

图 4 是采用不同特征值分布的输入信号 $x(n)$ 时, LMK($K = 2$) 算法的收敛曲线(特征值分布为 $x(R) = 1, 3, 10$ 和 100),系统噪声为正弦信号。由此可见, LMK 格形

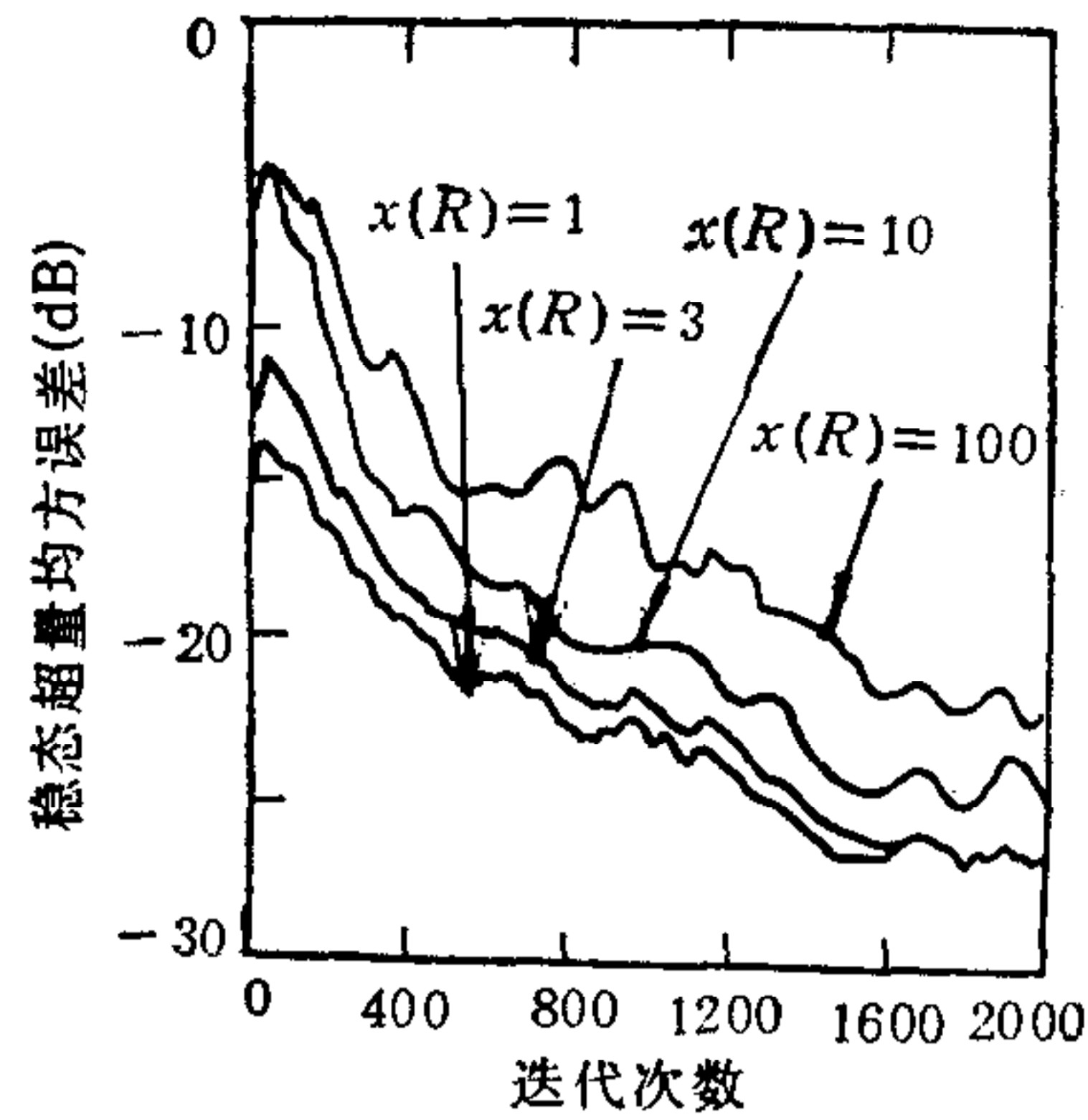


图 4 不同特征值分布信号 $x(n)$ 输入时,自适应格形梯度算法的收敛性能曲线

表 2 由模拟结果计算的 $I(K)$ 值

| | 高斯 | 均匀 | 正弦 | 二值 |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| $K=1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $K=2$ | 0.4848 | 2.0223 | 3.0416 | 3.7294 |

梯度算法对于输入信号的特征值变化是不敏感的。

六、结 论

本文引入的一类 LMK 梯度格形自适应滤波算法,常规的 LMS 梯度格形算法是它的特例 ($K=1$)。理论分析和计算机模拟的结果表明,这类算法具有格形梯度算法的优点;算法收敛速度与输入信号的特征分布无关。对于某些噪声分布 LMK($K>1$) 算法能获得优于 LMS 算法的收敛性能。

参 考 文 献

- [1] Walach, E. and Widrow, The Least Mean Fourth (LMF) Adaptive Algorithm and Its Family, *Trans. on IT*, 2, 1984年.
- [2] Haykin, S., *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, 1985.
- [3] Hoing, M. L. and Messerschmitt, D. G., Adaptive Filter Structure and Applications, *IEEE J. SAC.*, 2, 1984年.

A NEW FAMILY OF ADAPTIVE GRADIENT LATTICE ALGORITHM BASED ON LMK CRITERION

YE HUA WU BOXIU

(Dept. of Radio Engineering of Southeast University, Nanjing)

ABSTRACT

This paper extends the idea of minimizing error in the mean fourth power and mean sixth power, etc. to the lattice structure, and develops a family of LMK adaptive gradient lattice algorithms. The convergence behavior of the LMK gradient lattice algorithm is analyzed by deriving the approximate expressions for the mean and covariance functions of the adaptive lattice filter coefficients and the output mean square error of the adaptive lattice filter. A computer simulation has been performed to confirm the theoretical analysis results presented in this paper.

Key words: LMK adaptive gradient lattice algorithm.