第17卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 4
1991年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1991

鲁棒分散控制系统闭环传递矩阵的界

舒 煌 黄昌继
(西南交通大学计算机系,四川成都)

摘 要

本文将 Nyquist 阵列用于对象模型具有非结构不确定性的分散控制系统. 在假定返回差矩阵为广义块对角优势的条件下,得到了当某个子块反馈为开路(或某个反馈回路为开路)时的闭环传递矩阵(或闭环传递函数)的界及其特征值的包含域. 这是标准的 Ostrowski 带的再推广.

关键词: 分散控制系统,鲁棒控制,传递函数.

一、引 言

在多变量控制理论中, Nyquist 阵列(或逆 Nyquist 阵列)方法是较易于工程实施的. 它将多变量系统的设计问题转变成单变量系统的设计问题. 但是,由 Nyquist 阵列(即对角优势矩阵)得到的稳定性条件过于保守. Rosenbrock[1] 利用 Ostrowski 定理提出了一个能更精确计算某个反馈回路稳定储备的 Ostrowski 带,以代替标准的 Gerschgorin 带. Araki 和 Nwokah[2] 将这一结论推广到了广义对角优势系统. Bennett 和 Baras[3], Limebeer[4], Ohta 等[5]进而假定系统具有块对角优势、广义块对角优势和分散控制结构, 分别从不同角度发展了文献[1]和[2]的结果.

本文继续考虑非结构不确定系统的分散控制方案,进一步推广了文献[1—5]的结论. 本文涉及的关于M矩阵 (M_0 矩阵)的性质可见文献[6].

记号. 对正整数 r, 记 $N(r)=\{1,2,\cdots,r\}$.

二、闭环传递矩阵的界及特征值的包含域

考虑图1所示的具有m个输入和m个输出的系统. 若采用分散控制方式,则

$$K(s)=\operatorname{diag}\{K_1(s),\cdots,K_n(s)\}, F(s)=\operatorname{diag}\{F_1(s),\cdots,F_n(s)\}. \tag{1}$$

其中 K_i、F_i 为 r_i 阶方阵, $\sum_{i=1}^{n} r_i=m$.

设对象模型具有加性不确定性,则[7]

本文于1988年7月24日收到.

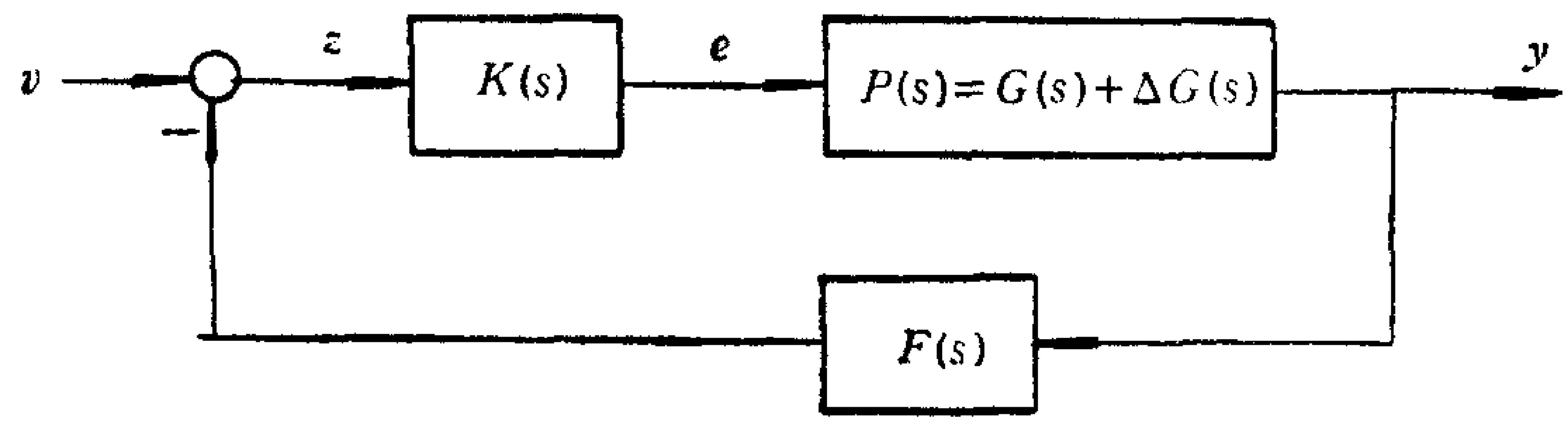

图 1　控制系统框图

$$P(s)=G(s)+\Delta G(s). \tag{2}$$

其中 $G(s)$ 为一确定的名义模型，$\Delta G(s)$ 为扰动模型。将 $P(s)$，$G(s)$ 和 $\Delta G(s)$ 按 $K(s)$ 和 $F(s)$ 的分块规模相应分块，即 $P(s)=(P_{ij}),G(s)=(G_{ij}),\Delta G(s)=(\Delta G_{ij})$，$P_{ij}$、$G_{ij}$ 和 ΔG_{ij} 均为 $r_i\times r_j$ 阶。假定

$$\sup\|\Delta G_{ij}(j\omega)\|\leqslant\delta_{ij}(j\omega),\quad i,j\in N(n). \tag{3}$$

这里是对在一弓形连通集任意变化的 $\Delta G_{ij}(j\omega)$ 取上确界[8]。

图 1 所示系统可用下述方程描述：

$$y_i=P_{ii}(s)e_i+\sum_{j\neq i}^{n}P_{ij}(s)e_j,\quad i\in N(n), \tag{4}$$

$$e_i=K_i(s)z_i,\qquad i\in N(n), \tag{5}$$

$$z_i=v_i-F_i(s)y_i,\qquad i\in N(n). \tag{6}$$

设 $K(s),F(s)$ 的第 k 个子块为开路，其他子块仍闭合，则当输入 $v=0$ 时，式(4)—(6)成为

$$y_i=P_{ii}(s)e_i+\sum_{j\neq i}^{n}P_{ij}(s)e_j,\quad i\in N(n), \tag{7}$$

$$e_i=-K_i(s)F_i(s)y_i\qquad i\in\Lambda. \tag{8}$$

其中 $\Lambda=N(n)-\{k\}$。令 $H_k(s)$ 是当第 k 个子块反馈开路其他子块仍为闭合时从 e_k 到 y_k 的传递矩阵，即 $y_k=H_k(s)e_k$。应指出，这个 $H_k(s)$ 和通常的闭环传递矩阵意义不同。

定义两个 $n\times n$ 非负矩阵 $C(s)$ 和 $D(s)$

$$\left.\begin{aligned}&C(s)=(c_{ij}),\\&c_{ii}(s)=\delta_{ii}\|G_{ii}^{-1}\|,\quad c_{ij}(s)=\|G_{ij}G_{jj}^{-1}\|+\delta_{ij}\|G_{jj}^{-1}\|,\ i\neq j.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}&D(s)=\operatorname{diag}\{d_1(s),\cdots,d_n(s)\},\\&d_i(s)=\|G_{ii}K_iF_i(I+G_{ii}K_iF_i)^{-1}\|.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

定理 1. 设 $s\in j\omega$，如果

i) $\det[I+G_{jj}(s)K_j(s)F_j(s)]\neq 0,\ j\in\Lambda,$ (11)

ii) 有正对角阵 $\Gamma(s)=\operatorname{diag}\{\gamma_1(s),\cdots,\gamma_n(s)\}$ 使 $\Gamma(s)-C(s)$ 是 M_0 矩阵，且

$$d_j(s)<1/\gamma_j(s),\quad j\in\Lambda. \tag{12}$$

则

$$\|H_k(s)-G_{kk}(s)\|\leqslant\gamma_k(s)\|G_{kk}(s)\|+\delta_{kk}(s). \tag{13}$$

证. 由式(7)和式(8)得

$$(I + P_{ii}K_iF_i)y_i + \sum_{j\neq i,k}^{n} P_{ij}K_jF_jy_j = P_{ik}e_k,\ i\in\Lambda, \tag{14}$$

$$y_k = P_{kk}e_k - \sum_{j\neq k}^{n} P_{ij}K_jF_jy_j. \tag{15}$$

根据 $H_k(s)$ 的定义及式(15)得

$$(H_k - P_{kk})e_k = -\sum_{j\neq k}^{n} P_{kj}K_jF_jy_j. \tag{16}$$

记

$$x_i = G_{ii}K_iF_iy_i,\ i\in\Lambda. \tag{17}$$

则由式(16)和(17)得

$$\begin{aligned}\|H_k - P_{kk}\| &= \sup_{e_k}\left\{\left\|\sum_{j\neq k}^{n} P_{kj}K_jF_jy_j\right\|/\|e_k\| : e_k\neq 0\right\}\\ &\leqslant \sup_{e_k}\left\{\sum_{j\neq k}^{n}\|P_{kj}G_{jj}^{-1}\|\cdot\|x_j\|/\|e_k\| : e_k\neq 0\right\}.\end{aligned} \tag{18}$$

由式(2),将式(14)改写成

$$\begin{aligned}(I + G_{ii}K_iF_i)y_i &= -\Delta G_{ii}K_iF_iy_i - \sum_{j\neq i,k}^{n}(G_{ij} + \Delta G_{ij})K_jF_jy_j\\ &\quad + (G_{ik} + \Delta G_{ik})e_k, i\in\Lambda.\end{aligned} \tag{19}$$

由式(17)和式(19)得

$$\begin{aligned}x_i = -G_{ii}K_iF_i(I + G_{ii}K_iF_i)^{-1}\Big[&\Delta G_{ii}G_{ii}^{-1}x_i + \sum_{j\neq i,k}^{n}(G_{ij} + \Delta G_{ij})G_{jj}^{-1}x_j\\ &- (G_{ik} + \Delta G_{ik})G_{kk}^{-1}G_{kk}e_k\Big],\ i\in\Lambda.\end{aligned} \tag{20}$$

故

$$\begin{aligned}\|x_i\| &- \|G_{ii}K_iF_i(I + G_{ii}K_iF_i)^{-1}\|\Big[\|\Delta G_{ii}G_{ii}^{-1}\|\,\|x_i\|\\ &+ \sum_{j\neq i,k}^{n}\|(G_{ij} + \Delta G_{ij})G_{jj}^{-1}\|\,\|x_j\|\Big]\\ &\leqslant \|G_{ii}K_iF_i(I + G_{ii}K_iF_i)^{-1}\|\,\|(G_{ik}\\ &+ \Delta G_{ik})G_{kk}^{-1}\|\,\|G_{kk}\|\,\|e_k\|,\ i\in\Lambda.\end{aligned} \tag{21}$$

考虑到式(3)得

$$\begin{aligned}\|x_i\| &- \|G_{ii}K_iF_i(I + G_{ii}K_iF_i)^{-1}\|\Big[\delta_{ii}\|G_{ii}^{-1}\|\,\|x_i\|\\ &+ \sum_{j\neq i,k}^{n}(\|G_{ij}G_{jj}^{-1}\| + \delta_{ij}\|G_{jj}^{-1}\|)\|x_j\|\Big]\end{aligned}$$

$$\leqslant \|G_{ii}K_iF_i(I+G_{ii}K_iF_i)^{-1}\|(\|G_{ik}G_{kk}^{-1}\|+\delta_{ik}\|G_{kk}^{-1}\|)\|G_{kk}\|\|e_k\|,$$
$$i\in\Lambda. \tag{22}$$

令

$$a_\Lambda=[a_1,\ \cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n]^T,\ a_i=\|x_i\|, \tag{23}$$

考虑到 $C(s)$ 和 $D(s)$ 的定义式(9)和式(10),则式(22)改写成

$$a_i-d_i\sum_{j\neq k}^{n}c_{ij}a_j\leqslant d_ic_{ik}\|G_{kk}\|\|e_k\|,\ i\in\Lambda. \tag{24}$$

写成矩阵形式

$$(I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda})a_\Lambda\leqslant D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda k}\|G_{kk}\|\|e_k\|. \tag{25}$$

其中 $C_{\Lambda\Lambda}(D_{\Lambda\Lambda})$ 是 $C(D)$ 删去第 k 行和第 k 列余下的子阵，$C_{\Lambda k}$ 则是取 C 的第 k 列并删去其中分量 c_{kk} 余下的列向量．由 $\Gamma_{\Lambda\Lambda}-C_{\Lambda\Lambda}$ 是 M_0 矩阵（条件 ii))及 $1/d_i>\gamma_i$ $(i\in\Lambda)$ 知 $D_{\Lambda\Lambda}^{-1}-C_{\Lambda\Lambda}$ 是 M 矩阵，从而 $I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda}=D_{\Lambda\Lambda}(D_{\Lambda\Lambda}^{-1}-C_{\Lambda\Lambda})$ 也是 M 矩阵,故 $(I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda})^{-1}$ 存在且为非负矩阵．这样,由式(25)得

$$a_\Lambda\leqslant(I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda})^{-1}D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda k}\|G_{kk}\|\|e_k\|. \tag{26}$$

将式(26)代入式(18)得

$$\|H_k-P_{kk}\|\leqslant C_{k\Lambda}(I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda})^{-1}D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda k}\|G_{kk}\|. \tag{27}$$

$C_{k\Lambda}$ 是 C 阵取第 k 行再删去分量 c_{kk} 后得到的行向量．

现证

$$\gamma_k\geqslant C_{k\Lambda}(I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda})^{-1}D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda}. \tag{28}$$

由条件 ii) 知

$$\begin{bmatrix}D_{\Lambda\Lambda}^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda} & -D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda k}\\ -C_{k\Lambda} & \gamma_k\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}\Gamma_{\Lambda\Lambda}-C_{\Lambda\Lambda} & -C_{\Lambda k}\\ -C_{k\Lambda} & \gamma_k-c_{kk}\end{bmatrix}. \tag{29}$$

式(29)右端是一 M_0 矩阵，且由 $D_{\Lambda\Lambda}$ 是正对角阵知(29)式左端第二个矩阵至少也是一 M_0 矩阵,故

$$0\leqslant\det\begin{bmatrix}I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda} & -D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda k}\\ -C_{k\Lambda} & \gamma_k\end{bmatrix}$$
$$=[\gamma_k-C_{k\Lambda}(I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda})^{-1}D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda k}]\det(I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda}).$$

由 $\det(I-D_{\Lambda\Lambda}C_{\Lambda\Lambda})>0$ 知式(28)成立．再考虑到式(3)得

$$\|H_k-P_{kk}\|=\|H_k-G_{kk}-\Delta G_{kk}\|\geqslant\|H_k-G_{kk}\|-\delta_{kk}. \tag{30}$$

由式(27),(28)和式(30)得式(13)．证毕．

如何根据 $C(s)$ 确定 $\Gamma(s)$ 使 $\Gamma(s)-C(s)$ 为 M_0 矩阵，文献[2]给出了一个严格的解析方法．此外,定理 1 所采用的范数可以是任一相容范数．

(13)式一般并不好用,为此我们来求 $H_k(s)$ 的特征值的包含域．对 G_{kk} 作 Shur 变换得

$$G_{kk}=U_k(X_k+Y_k)U_k^H. \tag{31}$$

其中 U_k 是酉交换矩阵，$X_k=\mathrm{diag}(x_1^k,\cdots,x_{r_k}^k)$,$\boldsymbol{Y}_k$ 是严格上三角形矩阵．从定理 1 可得 H_k 的特征值 $\lambda(H_k)$ 的一个估计．

推论 1.　当定理 1 条件成立时

$$\min_{1\leqslant i\leqslant r_k}|\lambda(H_k)-x_i^k|\leqslant \nu_k\|G_{kk}\|+\delta_{kk}+\|Y_{kk}\|. \tag{32}$$

特别当 G_{kk} 为可正规化矩阵时

$$\min_{1\leqslant i\leqslant r_k}|\lambda(H_k)-x_i^k|\leqslant \nu_k\|G_{kk}\|+\delta_{kk}. \tag{33}$$

证. 由式(13)及式(31)有

$$\begin{aligned}\nu_k\|G_{kk}\|+\delta_{kk}&\geqslant\|H_k-G_{kk}\|=\|H_k-U_k(X_k+Y_k)U_k^H\|\\&\geqslant\|U_k^HH_kU_k-X_k\|-\|Y_k\|\\&\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant r_k}|\lambda(H_k)-x_i^k|-\|Y_k\|.\end{aligned}$$

即得式(32). 证毕.

三、闭环传递函数的界

考虑定理 1 的一个应用. 假定 $F(s)$ 为对角形

$$F_i(s)=\mathrm{diag}\{f_1^i(s),\cdots,f_{r_i}^i(s)\},\ i\in N(n). \tag{34}$$

令 $F(s)$ 的第 k 子块的第 l 个回路开路,则当输入 $v=0$ 时有

$$z_{j_t}=-f_t^j(s)y_{j_t},j\in N(n),t\in N(r_j),\ j_t\neq k_l. \tag{35}$$

其中 $y_{j_t}(z_{j_t})$ 是 $y_j(z_j)$ 的第 t 个元素. 令 $\hat{h}_l^k(s)$ 是当 $F(s)$ 的第 k 子块中的第 l 个回路开路而其他回路闭合时从 z_{kl} 到 y_{kl} 的传递函数. 又定义矩阵 $Q(s)=(Q_{ij})$、$\Delta Q(s)=(\Delta Q_{ij})$ 及 $W(s)=(w_{tu})$ 如下:

$$Q_{ij}(s)=G_{ij}K_j,\Delta Q_{ij}(s)=\Delta G_{ij}K_j,\ i,j\in N(n), \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned}&w_{tt}(s)=|\Delta q_{tt}^{kk}|.\\&w_{tu}(s)=|q_{tu}^{kk}|+|\Delta q_{tu}^{kk}|,t\neq u.\end{aligned}\right\}\ t,\ u\in N(r_k). \tag{37}$$

其中 $q_{tu}^{kk}(\Delta q_{tu}^{kk})$ 是 $Q_{kk}(s)(\Delta Q_{kk}(s))$ 的第 (t,u) 个元素 $C(s)$ 和 $D(s)$ 的定义仍如式(9)和式(10).

定理 2. 用$\|\cdot\|$表$\|\cdot\|_1$或$\|\cdot\|_\infty$. 设 $s\in j\omega$

i) $|f_t^j(s)|<(\{1+\lambda_p[C(s)]\}\|Q_{jj}(s)\|)^{-1},j\in\Lambda,t\in N(r_j).$ (38)

ii) $1+q_{tt}^{kk}(s)f_t^k(s)\neq 0,t\in\pi.$ (39)

iii) $|f_t^k(s)|<\{\lambda_p[C(s)]\|Q_{kk}(s)\|+\|[W(s)]_{\pi\pi}\|+|q_{tt}^{kk}(s)|\}^{-1},t\in\pi.$ (40)

其中$\pi=N(r_k)-\{l\}$ (特指第 k 子块), $\lambda_p[C(s)]$ 是 $C(s)$ 的 Perron 根, $[W(s)]_{\pi\pi}$ 是 $W(s)$ 删去第 l 行和第 l 列后余下的子块. 当条件 i) 成立时,有

$$d_j(s)<\lambda_p^{-1}[C(s)],\ j\in\Lambda. \tag{41}$$

当条件 i)—iii) 同时成立时,有

$$|\hat{h}_l^k(s)-q_{ll}^{kk}(s)|\leqslant\lambda_p[C(s)]\|Q_{kk}\|+\|W(s)\|. \tag{42}$$

证. 先证式(41), 记 $\hat{\lambda}=\lambda_p[C(s)]$. 由 $D(s)$ 的定义式(10)及式(36)第一式和条件 i) 得

$$\begin{aligned}d_j&=\|G_{jj}K_jF_j(I+G_{jj}K_jF_j)^{-1}\|=\|Q_{jj}F_j(I+Q_{jj}F_j)^{-1}\|\\&\leqslant\|Q_{jj}\|\|F_j\|(1-\|Q_{jj}\|\|F_j\|)^{-1}\\&<\|Q_{jj}\|[(1+\hat{\lambda})\|Q_{jj}\|]^{-1}\{1-\|Q_{jj}\|[(1+\hat{\lambda})\|Q_{jj}\|]^{-1}\}^{-1}\end{aligned}$$

$$= \hat{\lambda}^{-1}, \quad j \in \Lambda.$$

即得式(41)．故定理 1 的条件得以满足．

再证式(42)．为此，只需考虑第 k 行块，不失一般性，令 $l = r_k$（第 k 行块的末行）．由式(4)，式(5)及式(36)得

$$y_k = (Q_{kk} + \Delta Q_{kk})z_k + \sum_{j \neq k}^{n} (Q_{kj} + \Delta Q_{kj})z_j. \tag{43}$$

将 Q_{kj}、ΔQ_{kj} 按列分块得

$$Q_{kj} = [(\bar{q}^{kj}{}_1)^T, \cdots, (\bar{q}_l^{kj})^T]^T, \Delta Q_{kj} = [(\Delta\bar{q}_1^{kj}), \cdots, (\Delta\bar{q}_l^{kj})^T]^T, \quad j \neq k. \tag{44}$$

则式(43)可改写成

$$y_{k_t} = (q_{tt}^{kk} + \Delta q_{tt}^{kk})z_{k_t} + \sum_{u \neq t}^{l} (q_{tu}^{kk} + \Delta q_{tu}^{kk})z_{k_u} + \sum_{j \neq k}^{n} (\bar{q}_t^{kj} + \Delta\bar{q}_t^{kj})z_j,$$

$$t \in N(l). \tag{45}$$

另一方面，由式(4)、式(5)及式(35)得

$$[I + (Q_{\Lambda\Lambda} + \Delta Q_{\Lambda\Lambda})F_{\Lambda\Lambda}]y_\Lambda = [Q_{\Lambda k} + \Delta Q_{\Lambda k}]z_k. \tag{46}$$

其中 y_Λ 是 y 删去子向量 $[y_{k_1}, \cdots, y_{k_l}]^T$ 后得到的向量．由式(35)及式(46)得

$$z_\Lambda = -F_{\Lambda\Lambda}y_\Lambda = -F_{\Lambda\Lambda}[I + (Q_{\Lambda\Lambda} + \Delta Q_{\Lambda\Lambda})F_{\Lambda\Lambda}]^{-1}(Q_{\Lambda k} + \Delta Q_{\Lambda k})z_k. \tag{47}$$

记

$$A = (a_{tu}) = -(Q_{k\Lambda} + \Delta Q_{k\Lambda})F_{\Lambda\Lambda}[I + (Q_{\Lambda\Lambda} + \Delta Q_{\Lambda\Lambda})F_{\Lambda\Lambda}]^{-1}(Q_{\Lambda k} + \Delta Q_{\Lambda k}). \tag{48}$$

则由式(47)、式(48)知，式(45)最末一和式可改写成

$$\sum_{j \neq k}^{n} (\bar{q}_t^{kj} + \Delta\bar{q}_t^{kj})z_j = \sum_{u=1}^{l} a_{tu}z_{k_u}, \quad t \in N(l). \tag{49}$$

将式(45)代入式(49)，当 $t = l$ 时

$$|y_{k_l} - q_{ll}^{kk}z_{k_l}| \leqslant |\Delta q_{ll}^{kk}||z_{k_l}| + \sum_{u=1}^{l-1} (|q_{lu}^{kk}| + |\Delta q_{lu}^{kk}|)|z_{k_u}|$$

$$+ \sum_{u=1}^{l} |a_{lu}||z_{k_u}|. \tag{50}$$

当 $t \neq l$ 时，结合式(35)便得

$$z_{k_t} = -f_t^k(1 + q_{tt}^{kk}f_t^k)^{-1}\left[\Delta q_{tt}^{kk}z_{k_t} + \sum_{u \neq t}^{l} (q_{tu}^{kk} + \Delta q_{tu}^{kk})z_{k_u}\right.$$

$$\left. + \sum_{u=1}^{l} a_{tu}z_{k_u}\right], \quad t \in \pi. \tag{51}$$

故

$$|z_{k_t}| - |f_t^k(1 + q_{tt}^{kk}f_t^k)^{-1}|\left\{ |\Delta q_{tt}^{kk}||z_{k_t}| + \sum_{u \neq t}^{l-1} (|q_{tu}^{kk}| + |\Delta q_{tu}^{kk}|)|z_{k_u}|\right.$$

$$+ \sum_{u=1}^{l-1} |a_{tu}| |z_{ku}| \Big\}$$

$$\leqslant |f_t^k(1 + q_{tt}^{kk} f_t^k)^{-1}| (|q_{tl}^{kk}| + |\Delta q_{tl}^{kk}| + |a_{tl}|) |z_{kl}|, \quad t \in \pi. \tag{52}$$

设 $\hat{A}$ 是 A 的诸元取模后得到的矩阵，且记

$$B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_l), b_t = |f_t^k(1 + q_{tt}^{kk} f_t^k)^{-1}|, \tag{53}$$

$$\beta = [\beta_1, \cdots, \beta_l], \beta_t = |z_{k_t}|. \tag{54}$$

则式(52)和式(50)可分别改写成

$$\{I - B_{\pi\pi}[W_{\pi\pi} + \hat{A}_{\pi\pi}]\}\beta_\pi \leqslant B_{\pi\pi}(W_{\pi l} + \hat{A}_{\pi l})\beta_l, \tag{55}$$

$$|y_{kl} - q_{ll}^{kk} z_{kl}| \leqslant (W_{l\pi} + \hat{A}_{l\pi})\beta_\pi + (|\Delta q_{ll}^{kk}| + |a_{ll}|)\beta_l. \tag{56}$$

下面证 $I - B_{\pi\pi}[W_{\pi\pi} + \hat{A}_{\pi\pi}]$ 是M矩阵. 先由式(14)，式(15)得

$$H_k = P_{kk} - P_{k\Lambda} K_{\Lambda\Lambda} F_{\Lambda\Lambda} (I + P_{\Lambda\Lambda} K_{\Lambda\Lambda} F_{\Lambda\Lambda})^{-1} P_{\Lambda k}. \tag{57}$$

将式(57)右乘 K_k，并由 Q、ΔQ 的定义(式(36))知

$$H_k K_k - P_{kk} K_k = -(Q_{k\Lambda} + \Delta Q_{k\Lambda}) F_{\Lambda\Lambda} [I + (Q_{\Lambda\Lambda} + \Delta Q_{\Lambda\Lambda}) F_{\Lambda\Lambda}]^{-1} (Q_{\Lambda k} + \Delta Q_{\Lambda k})$$

$$= A. \tag{58}$$

这样，通过与定理 1 完全相同的步骤可得(比较式(13))

$$\|A\| = \|H_k K_k - P_{kk} K_k\| \leqslant \hat{\lambda} \|Q_{kk}\|. \tag{59}$$

由$\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$或$\|\cdot\|_\infty$知 $\|A\| = \|\hat{A}\|$，故

$$\|W_{\pi\pi} + \hat{A}_{\pi\pi}\| \leqslant \|W_{\pi\pi}\| + \|\hat{A}_{\pi\pi}\| \leqslant \|W_{\pi\pi}\| + \hat{\lambda}\|Q_{kk}\|. \tag{60}$$

另一方面，由条件 iii)

$$\begin{aligned} b_t &= |f_t^k(1 + q_{tt}^{kk} f_t^k)^{-1}| \\ &\leqslant |f_t^k| (1 - |q_{tt}^{kk}| |f_t^k|)^{-1} \\ &< [\hat{\lambda}\|Q_{kk}\| + \|W_{\pi\pi}\| + |q_{tt}^{kk}|]^{-1} / \{1 - |q_{tt}^{kk}| [\hat{\lambda}\|Q_{kk}\| + \|W_{\pi\pi}\| \\ &\quad + |q_{tt}^{kk}|]^{-1}\} \\ &= (\|W_{\pi\pi}\| + \hat{\lambda}\|Q_{kk}\|)^{-1}, \quad t \in \pi. \end{aligned} \tag{61}$$

由式(60)和式(61)知 $I - B_{\pi\pi}(W_{\pi\pi} + \hat{A}_{\pi\pi})$ 是 M 矩阵. 由式(55)得

$$\beta_\pi \leqslant [I - B_{\pi\pi}(W_{\pi\pi} + \hat{A}_{\pi\pi})]^{-1} B_{\pi\pi}(W_{\pi l} + \hat{A}_{\pi l})\beta_l. \tag{62}$$

将式(62)代入式(56)得

$$\begin{aligned} |y_{kl} - q_{ll}^{kk} z_{kl}| \leqslant \{ &(W_{l\pi} + \hat{A}_{l\pi})[I - B_{\pi\pi}(W_{\pi\pi} + \hat{A}_{\pi\pi})]^{-1} \\ &\cdot B_{\pi\pi}(W_{\pi l} + \hat{A}_{\pi l}) + |\Delta q_{ll}^{kk}| + |a_{ll}|\}\beta_l. \end{aligned} \tag{63}$$

再用和定理 1 最后一部分证明的同样方法(即证式(28)的过程)，可得式(63)的右端

$$\begin{aligned} &(W_{l\pi} + \hat{A}_{l\pi})[I - B_{\pi\pi}(W_{\pi\pi} + \hat{A}_{\pi\pi})]^{-1} B_{\pi\pi}(W_{\pi l} + \hat{A}_{\pi l}) + |\Delta q_{ll}^{kk}| + |a_{ll}| \\ &\leqslant \lambda_p\left(\begin{bmatrix} W_{\pi\pi} + \hat{A}_{\pi\pi} & W_{\pi l} + \hat{A}_{\pi l} \\ W_{l\pi} + \hat{A}_{l\pi} & |\Delta q_{ll}^{kk}| + |a_{ll}| \end{bmatrix}\right) \\ &= \lambda_p(W + \hat{A}) \leqslant \|\hat{A}\| + \|W\| \leqslant \hat{\lambda}\|Q_{kk}\| + \|W\|. \end{aligned} \tag{64}$$

这样，由式(63)、(64)和式(54)及 $\hat{h}_l^k(s)$ 的定义即得式(42). 证毕.

文献[5]对确定的对象模型，也考虑了与定理 2 类似的问题，但其中条件过强，致使系统已成为稳定，因此研究 $\hat{h}_l^k(s)$ 的界的意义也就减弱了. 此外，文献[5]给出的条件形式

也较复杂，不仅使推导烦琐，而且验证也麻烦。

四、关于系统稳定性的注释

假定 $P(s)$ 的不稳定极点数与 $G(s)$ 对角块上的不稳定极点数相等，且将定理 1 的条件式(12)改成 $d_j(s) < 1/\nu_j(s)$ 对任意 $j \in N(n)$ 成立，其他条件不变，则系统稳定。这一结论已由文献[9]证得。同样，如果 $P(s)$ 的不稳定极点数与 $G(s)$ 对角块上的不稳定极点数相等，且将定理 2 的条件式(40)改成对任意 $t \in N(r_k)$ 皆成立(或将式(38)改成对任意 $j \in N(n)$, $t \in N(r_j)$ 皆成立，去掉条件 iii))，其他条件不变，则系统仍然是稳定的。如果当 $P(s)$ 在弓形连通集内变化时，其不稳定极点穿越 $j\omega$ 轴，则按照文献[8]的方法，并用 Nyquist 判据和逆 Nyquist 判据，也可得到稳定条件。

参　考　文　献

[1] Rosenbrock, H. H., Computer-aided Control System Design, Academic Press, 1974.

[2] Araki, M. and Nwokah, O. I., Bounds for Closed-loop Transfer Functions of Multivariable Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-20**(1975), 666—670.

[3] Bennett, W. H. and Baras, J. S., Block Diagonal Dominance and Design of Decentralized Compensators, Proc. IFAC Symp. Large Scale Syst. Theory, Appl., 1980, 93—102.

[4] Limebeer, D. J. N., The Application of Generalized Diagonal Dominance to Linear System Stability Theory, *Int. J. Contr.*, **36**(1982), 185—212.

[5] Ohta, Y., Siljak, D. D. and Matsumoto, T., Decentralized Control Using Quasi-Block Diagonal Dominance of Transfer Function Matrices, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-31**(1986), 420—429.

[6] Berman, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Academic Press (1979).

[7] Doyle, J. C. and Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical Modern Synthesis, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-26**(1981), 4—16.

[8] Postlethwaite, I. and Foo, Y. K., Robustness with Simultaneous Pole and Zero Movement Across the j_ω-axis, *Automatica*, **21**(1985), 433—443.

[9] Nwokah, O. D. I., The Robust Decentralized Stabilization of Complex Feedback Systems, *IEE Proc. (D)*, **134**(1987), 43—47.

BOUNDS FOR CLOSED-LOOP TRANSFER FUNCTION MATRICEDS OF ROBUST DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS

Shu Huang　　Huang Changji

(*Southwest Jiaotong University*)

Abstract

The Nyquist arrays are applied to decentralized control systems with plants of unstructured uncertainties. By the assumption that return difference matrices are generalized-block diagonally dominant, bounds for closed-loop transfer function matrices (or for closed-loop transfer functions) and the inclusion regions for their eigenvalues are obtained when a certain block of feedback loops are open (or a certain feedback loop is open). These are further generalizations of the standard Ostrowski band.

Key words: Decentralized control systems; robust control; transfer functions.