第 17 卷 第 4 期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 4
1991 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1991

二维可分 Roesser 模型的模能控(观)性

邹 云 杨成梧
(华东工学院自动化系,南京)

摘 要

本文讨论了二维可分 Roesser 模型 (RM) 的模能控(观)性的判定问题,得出了相应的充要条件和数值稳定的算法,同时给出了该算法具有数值鲁棒性的充要条件和算法累积误差最大容许上界的显式估计,最后对二维可分 RM 的模能观性在状态空间中给出了一种几何解释.

关键词: 多维系统,能控性,线性系统.

一、引 言

二维 Roesser 模型是二维系统理论中最重要也是应用最广的一类状态空间模型,其数学描述如下:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, j), \tag{1}$$

$$y(i, j) = [C_1, C_2] \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix},$$

其中 $x^h(i, j) \in R^{n_1}$ 是 n_1 维水平状态向量,$x^v(i, j) \in R^{n_2}$ 为 n_2 维垂直状态向量,$u(i, j) \in R^m$ 为 m 维输入向量,$y(i, j) \in R^l$ 为 l 维输出向量. A_{ij} 及 $B_i (i, j = 1, 2)$ 各为适当维数的实矩阵. 方程 (1) 的边界条件为

$$x^h(0, j), \ x^v(i, 0), \ i, j = 0, 1, 2, \cdots.$$

自从 Kung[2] 等人于 1977 年提出 Roesser 模型的模能控(观)理论后,该理论一直成为探求二维 RM 的最小实现问题的基础,但模能控(观)性的研究一直存在如下两个问题:一是模能控(观)性在状态空间上至今尚未找到较为合理的解释,再者就是缺乏较为有效的数值判别方法. 本文即针对其有可分性[1]的二维 Roesser 模型提出了一种较为实用的模能控(观)性的数值判别法,并在作者以前的有关工作基础上[4,5]讨论了该算法的数值鲁棒性和最大容许误差问题,得到了相应的结果,最后对其模能观性给出了状态空间上的一种几何解释. 本文全部结果显然均可推广到N维情形.

本文于 1989 年 11 月 20 日收到.

二、主要结果

定义 1[1]. 称 RM(1) 是模能控的系指

$$A(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & z_2 I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

关于二维多项式矩阵环 $C[z_1, z_2]$ (这里 C 表示复数域)是左互质的. 显然亦可给出对偶的模能观定义.

定义 2[1]. 称 RM(1) 是可分的系指:存在多项式 $p_1(z_1)$, $p_2(z_2)$ 使

$$p(z_1, z_2) \triangleq \det A(z_1, z_2) = p_1(z_1) p_2(z_2) \tag{3}$$

设 z_{1i}, $i = 1, 2, \cdots, n_1$ 和 z_{2j}, $j = 1, 2, \cdots, n_2$ 分别为 A_{11} 和 A_{22} 的特征值,则有如下定理:

定理 1. 若 RM(1) 可分,则其模能控的充要条件为: 对于 $i = 1, 2, \cdots, n_1$ 和 $j = 1, 2, \cdots, n_2$,

$$A(z_{1i}, z), \ B \text{ 以及 } A(z, z_{2j}), \ B \tag{4}$$

关于一维多项式矩阵环 $C[z]$ 是左互质的.

证明. 设 $\det A(z_1, z_2) = \prod_{i=1}^{k} p_i(z_1, z_2)$, 其中 $p_i(z_1, z_2)$ 为复数域上的既约多项式. 则据 Kung[1,2] 判据知: 系统 (1) 模能控的充要条件为对由既约多项式 $p_i(z_1, z_2)$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 所生成的既约代数曲线 V_i 上的任意生成点 (generic point) $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ 均有

$$\operatorname{rank} [A(\bar{z}_1, \bar{z}_2), B] = n. \tag{5}$$

而由文献[10]的结果知: 系统 (1) 可分的充要条件为

$$\det A(z_1, z_2) = \det(I_{n_1} z_1 - A_{11}) \det(I_{n_2} z_2 - A_{22}), \tag{6}$$

从而由 $\det A(z_1, z_2)$ 产生的所有生成点集为

$$V_{1i} = \{(z_{1i}, z): z \in C, z \neq \infty\}, \ i = 1, 2, \cdots n_1, \tag{7}$$

$$V_{2j} = \{(z, z_{ij}): z \in C, z \neq \infty\}, \ j = 1, 2, \cdots, n_2. \tag{8}$$

由此据一维多项式阵理论即得本定理结论.

由对偶性亦可得关于模能观性的类似结果. 这样就将判定一个二维多项式矩阵的互质问题简化为相应的一维问题. 显然上述证明过程已经表明了下述结论.

定理 2. 若 RM(1) 可分, 则其为模能控的充要条件为对任意有限的复数 $z \in C$ 有

$$\operatorname{rank}[A(z_{ij}, z), B] = \operatorname{rank}[A(z, z_{2j}), B] = n, \ (i = 1, 2, \cdots, n_1, \ j = 1, 2, \cdots, n_2). \tag{9}$$

由定理 2 知,若令

$$E_1 = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \\ & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & \\ & I_{n_2} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

则判别一可分系统 RM(1) 是否模能控(观)等价于判别至多 $n_1 \times n_2$ 个非正则束的广义系统的 R-能控(观)问题,即全部问题化为判别

$$\operatorname{rank}[sE_i - A_{ij}, B] = n, \ \forall s \in C, \ s \neq \infty \tag{11}$$

对所有 $i=1, 2, j=1, 2, \cdots, n_{\sigma(i)}$ 是否均成立的问题,其中

$$\sigma(i) = \begin{cases} 2, & i=1, \\ 1, & i=2, \end{cases} \quad A_{1j} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - z_{2j} I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad A_{2j} = \begin{bmatrix} A_{11} - z_{1j} I_n & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

显然有如下算法(这里,无妨设 B 列满秩):

算法一. 模能控性数值判别.

步骤 1. 计算出 A_{11}, A_{22} 的所有互异特征值为 z_{1i}, z_{2j}, $i=1, 2, \cdots, m_1, j=1, 2, \cdots, m_2$, $m_k \leqslant n_k$, $(k=1, 2)$. 置 $i:=1$, $j:=1$.

步骤 2. 置 $(E_0, A_0, B_0):=(E_i, A_{ij}, B)$.

步骤 3. 取行压缩变换[3] U 使得

$$U^T(E_0, A_0, B_0) = \left[\begin{array}{c|c|c} E_{r1} & A_{r1} & B_r \\ E_{r2} & A_{r2} & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \}\rho \\ \}\mu \end{matrix}, \tag{13}$$

其中 $\operatorname{rank} B_r = \rho$. 若 $\rho = \rho(B_0) \triangleq B_0$ 的行数,则此时 i) 若 $j < n_i$, 则置 $j:=j+1$, 返回步骤 2; ii) 若 $j = n_i$, 但 $i \neq 2$, 则置 $i:=i+1$, $j:=1$, 返回步骤 2; iii) 若 $j = n_2$, 则可分系统 (1) 必模能控,停止运算; iv) 若 $\rho \neq \rho(B_0)$, 则转入下一步.

步骤 4. 取列压缩变换[3] V 使

$$\left[\begin{array}{c|c|c} E_{r1} & A_{r1} & B_r \\ E_{r2} & A_{r2} & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} V & & \\ \hline & V & \\ \hline & & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc|c} E_c & E_{rc} & A_c & A_{rc} & B_r \\ 0 & \underbrace{\hat{E}_1}_{\mu} & \hat{B}_1 & \underbrace{\hat{A}_1}_{\mu} & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \}\rho \\ \}\mu \end{matrix}, \tag{14}$$

由于 $\operatorname{rank} E_{r2} \leqslant \mu$, 所以上述变换总是可行的. 若 $\hat{B}_1 \neq 0$, 则置 $(E_0, A_0, B_0):=(\hat{E}_1, \hat{A}_1, \hat{B}_1)$, 返回步骤 3. 若 $\hat{B}_1 = 0$, 则用后面将要给出的算法二判别矩阵 $s\hat{E}_1 - \hat{A}_1$ 是否单位模阵(定义见后),若是单位模阵,则转入步骤 3 的 i), 否则系统 (1) 必模不能控,故停止计算.

定义 3[1]**.** 称多项式阵 $A(z)$ 为单位模阵系指 $\det A(z) = c \neq 0$, 其中 c 为常数.

注记 1. 显然由于上述算法的运算结果实际上是呈块对角的,所以其正确性是不证自明的. 其中步骤 4 中若 $\hat{B}_1 = 0$, 而 $sE_1 - A_1$ 为非单位模阵,则易知必存在 (E_1, A_1) 的广义特征值 λ_0 使得 $\lambda_0 E_1 - A_1$ 降秩,从而造成系统 (1) 模不能控.

算法二. 判别 $sE - A$ 是否单位模阵.

步骤 1. 置 $(E_0, A_0):=(E, A)$.

步骤 2. 若 $E_0 = 0$, 则判别 A_0 是否满秩,若满秩,则 $sE - A$ 为单位模阵,否则必为非单位模阵,故停止计算. 若 $E_0 \neq 0$, 则转入下一步.

步骤 3. 取行压缩变换 U 使

$$U^T(E_0, A_0) = \left[\begin{array}{c|c} E_{r1} & A_{r1} \\ 0 & A_{r2} \end{array}\right] \begin{matrix} \}\rho \\ \}\mu \end{matrix}, \ E_{r1} \text{ 行满秩}, \tag{15}$$

再取列压缩变换 V 使

$$\begin{bmatrix} E_{r1} & A_{r1} \\ 0 & A_{r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & \\ & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 & E_{12} & \hat{A}_1 & \hat{A}_{12} \\ 0 & \underbrace{0}_{\mu} & 0 & \underbrace{\hat{A}_{22}}_{\mu} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\rho \\ \}\mu \end{matrix}. \tag{16}$$

由于 $\operatorname{rank} A_{r2} \leqslant \mu$, 所以上述变换总能实现. 此时若 $\hat{A}_{22}$ 非奇异且 $\hat{E}_1$ 奇异, 则置 $(E_0,$

$A_0):=(\hat{E}_1,\hat{A}_1)$，返回步骤 2. 若 $\hat{A}_{22}$ 奇异或 $\hat{E}_1$ 非奇异，则 $sE-A$ 必非单位模阵，故停止计算.

注记 2. 算法一和算法二中均用到了行、列压缩变换[3]，其作用等价于寻求一适当维数的可逆阵 K，将被变换阵 B 化为 $K^TB=\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix}$ 或 $BK=(B_1^T,0)$，其中 B_1 行满秩或 B_1^T 列满秩. 之所以采用行、列压缩变换[3]是因为要保证算法具有较好的数值稳定性的缘故. 文献[3]证明了这样的变换具有数值稳定性. 此外不难看出算法一、二均在有限步内完成，其中算法一的计算量不会超过 $(4n+3)\max\{n_1,n_2\}$ 步. 这里 $n=n_1+n_2$.

从算法一可以看出，由于舍入误差和计算特征值 z_{ij} 所产生的误差，从第二步起就会出现关于 E_i, A_{ij}, B 的计算误差. 显然可将这些误差看作为以 (E_i, A_{ij}, B), $i=1,2$, 为参数的广义系统受到了摄动 $(\Delta E,\Delta A,\Delta B)$ 的结果，这样就有必要较为深入地研究一下这类广义系统受摄动后对利用算法一判定系统(1)的模能控性所得结果的影响，以明确本文算法的数值鲁棒性. 为此令 $\rho_{ij}\triangleq\inf\{\|(\Delta E,\Delta A,\Delta B)\|:(E_i+\Delta E, A_{ij}+\Delta A, B+\Delta B)$ 使 (11) 式不成立$\}$ $i=1,2$, $j=1,2,\cdots,n_i$.

定义 4. 称 $\rho_0=\min\{\rho_{ij}: i=1,2, j=1,2,\cdots,n_i\}$ 为算法一的数值鲁棒性指标，而称算法一具有数值鲁棒性系指 $\rho_0>0$.

注记 3. 显然 ρ_0 也是算法一累积误差的最大容许上界. 因为只要计算所产生的累积误差 $\|(\Delta E,\Delta A,\Delta B)\|<\rho_0$，则算法一的数值判定结果就是完全正确的. 很明显，ρ_0 也可作为可分系统 (1) 模能控性裕度的一种参考度量. 由定理 2 及文 [4] 立即可知：

定理 3. 算法一具有数值鲁棒性的充要条件为

$$\operatorname{rank}(E_i, B)=n\triangleq n_1+n_2,\quad i=1,2,\tag{17}$$

亦即

$$\operatorname{rank} B_i=n_i,\quad i=1,2,\tag{18}$$

其中 E_i 如 (10) 式所定义. 由文献[11]显然有

定理 4. 若 (17) 式成立，则

$$\rho_0\geqslant\mu_0\triangleq\frac{1}{\sqrt{2}}\min_{\substack{|s|\leqslant 1\\ i,j}}\{\sigma_n(sE_i-A_{ij}, B),\sigma_n(E_i-sA_{ij}, B)\}>0,\tag{19}$$

其中 $\sigma_n(\cdot)$ 表示矩阵的最小奇值.

注记 4. 由于算法一本身所有的数值稳定性，定理 3 和定理 4 实际上已表明：若 (17) 式成立，则只要 A_{11} 和 A_{12} 不具有太严重的“病态”性质（这里 A_{ij} 如 (1) 中所定义），就可以认为算法一的计算结果对各类较高精度的计算机舍入误差并不敏感，从而具有较好的鲁棒性，μ_0 值越大，算法的(数值)鲁棒性越好. 此外若利用文[6]提出的数值秩概念和方法来进行算法一中有关矩阵秩的判断，则将会得到数值上更加稳定可靠的结果.

下面将给出一种关于可分的 RM 的模能观性在状态空间上的几何解释. 显然由定理 2 知：

定理 5. 若 RM(1) 可分，则其为模能观的充要条件为：对于任意有限的复数值 z_1, z_2，均有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A(z_1,z_2)\\C\end{bmatrix}=n,\tag{20}$$

这里 $n = n_1 + n_2$, $C = (C_1, C_2)$.

定理 6. 若 RM(1) 可分且模能观,则 (1) 的任意局部状态

$$x(k, l) = \begin{bmatrix} x^h(k, l) \\ x^v(k, l) \end{bmatrix}$$

均可由系统的未来输入和输出: $\{u(i, j), y(i, j): (i, j) \geqslant (k, l)\}$ 唯一确定(其中 $(i, j) \geqslant (k, l)$ 定义为 $i \geqslant k$, $j \geqslant l$), 反之亦然.

证明. 显然由于系统 (1) 的线性性,无妨可设 $u(i, j) = 0$, $(i, j) \geqslant (0, 0)$. 注意到若可分的 RM(1) 模能观,则由定理 6 知: $A(z_1, z_2)$, C 必右零互质[1], 从而必存在适当维数的多项式矩阵 $H_i(z_1, z_2)$, $i = 1, 2$. 使

$$[H_1(z_1, z_2), H_2(z_1, z_2)] \begin{bmatrix} A(z_1, z_2) \\ C \end{bmatrix} = I_n. \tag{21}$$

现定义位移算子 $z_i (i = 1, 2,)$ 为

$$z_1 x(i, j) = x(i + 1, j), \quad z_2 x(i, j) = x(i, j + 1), \tag{22}$$

则在 $u(i, j) = 0$ 假定下,系统 (1) 化为

$$\begin{bmatrix} A(z_1, z_2) \\ C \end{bmatrix} x(i, j) = \begin{bmatrix} 0 \\ y(i, j) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

综合 (21) 和 (23) 两式即得

$$x(i, j) = H_2(z_1, z_2) y(i, j). \tag{24}$$

由(22)式可知(24)式即为所证. 反之,若可分的 RM(1) 模不能观,则由定理 6 即知: 必存在 z_1^0, z_2^0 和 $x_0 \neq 0$, 使

$$\begin{bmatrix} A(z_1^0, z_2^0) \\ C \end{bmatrix} x_0 = 0. \tag{25}$$

令 $x^h(0, j) = (z_2^0)^j x_0^h$, $x^v(i, 0) = (z_1^0)^i x_0^v$, $(i, j) \geqslant (0, 0)$. 这里 $\begin{bmatrix} x_0^h \\ x_0^v \end{bmatrix} = x_0$, 则由数学归纳法或 RM 的状态响应公式和 (25) 式不难知: $x(i, j) \equiv 0$, $(i, j) \geqslant (1, 1)$, 从而初始局部状态 $x(0, 0) = x_0$ 与 $x(0, 0) = 0$ 是不可分辨的, 由此即知本定理得证.

三、结 束 语

本文主要讨论了具有可分性的 RM 的模能控(观)性的判别及数值计算问题.所得结果结构简单, 便于计算,且具有很好的数值稳定性和较强的鲁棒性,同时也给出了一种关于可分的 RM 的模能观性在状态空间上的较有说服力的几何解释. 由于可分系统所具有的许多优点,使它在二维系统理论和应用中起着越来越重要的作用,在许多情形下都需将二维系统近似地实现为可分的 RM 形式,所以对它的模能控(观)性的研究无疑有着特殊的意义.

参 考 文 献

[1] Kaczorek, T., Two-dimensional Linear Systems, Spinger-verlag, 1985.

[2] Kung, S. Y. and Levy, B. C., Morf, M., Kailath, T., New Results in 2-D Systems Theory; Part II, *Proc. IEEE,* **65**(1977), 6, 945—961.

[3] Dooren, P. Y., The Generalized Eigenstructure Problem in Linear System Theory, *IEEE Trans. Automat. Contr.,* **26**(1981), 1, 111—128.

[4] 杨成梧，邹云，广义系统能控性的鲁棒性，华东工学院学报，(1988)，1，1—11.

[5] 杨成梧，邹云，广义系统的最小能控结构，自动化学报，**15**(1989)，2，142—148.

[6] 毛剑琴，线性系统能控性，能观性的数值判断，控制理论与应用，**3**(1986)，1，58—66.

[7] Tao Lin, and Kawamata, M., Higucki, T., New Necessary and Sufficient Conditions for Local Controllability and Local Observability of 2-D Separable Denominator Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.,* **32** (1987), 3, 254—256.

[8] Tao Lin, and Kawamata, M., Higucki, T., Decomposition of 2-D Separable Denominator Systems: Existence, Unigueness, and Applications, *IEEE Trans. Circuits & Systems,* **34**(1987), 3, 292—296.

[9] Tao Lin, and Kawamatat, M., Higucki, T., Design of 2-D Digital Filerts Based on the Reduced-dimensional Decomposition, *IEEE Trans. Circuits & Systems,* **34**(1987), 8, 934—941.

[10] 邹云，N维系统可分性的充要判据，控制理论与应用，**7**(1990)，4，98—100.

[11] 杨成梧，邹云，能控广义系统到不能控系统集的距离，自动化学报，17(1991)，2.

ON THE MODEL CONTROLLABILITY AND MODEL OBSERVABILITY OF 2-D SEPARABLE ROESSER MODEL

Zou Yun Yang Chengwu

(East China Institute of Technology, Nanjing)

ABSTRACT

In this paper, we discuss the numerical algorithms for testing the model controllability and model observability of 2-D separable Roesser Model (RM). A number of necessary and sufficient criteria and a corresponding numerically stable algorithm are presented, and at last a geometric explanation in state space for model observability of separabel RM is given.

Key words: 2-D systems; linear systems; controllability.