第17卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 17, No. 4
1991年7月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1991

广义系统观控性及正则束条件的数值判定

杨成梧　　邹　云
（华东工学院八系，南京）

摘　　要

本文提出了一种用于判定广义系统观控性及正则束条件的算法．该算法具有误差小、数值稳定的特点．

关键词：线性系统，奇异系统．

一、引　　言

考虑如下形式的广义系统[1]：

$$\theta:\begin{cases}F\dot{x}=Ax+Bu,\\ y=Cx.\end{cases}$$

其中 $E,A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times m}$，$C\in R^{l\times n}$，E 为奇异阵且 E,A 满足正则束条件

$$\det(sE-A)\neq 0. \tag{1}$$

广义系统最具特色的一个重要方面也许就是能控(观)性理论了．关于这个理论，先后有许多人[2-8]发展了不少独具风格的能控(观)性概念及其判据和结构性质，并建立了观控性的对偶性[4]．目前主要有以下三种能控性概念：R-能控性[1,5]、强能控性[1-4,6]和完全能控性[1,5]．为简洁计，这里不再列出具体定义，读者可参阅有关文献．其主要判据亦大致分为三类：

一类是 Yip[5] 和 Verghese[6] 提出的分别建立在矩阵束秩条件和行(列)压缩变换[10]基础上的较为直接的判据．亦即

引理． 系统 θ 为(i)R-能控、(ii) 强能控、及 (iii) 完全能控的充要条件分别为

(i) $\operatorname{rank}(sE-A,B)=n$，$\forall s\in C$． (2)

(ii) θ 为 R-能控且在行压缩变换 U 作用下有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}E_1 & 0\\ A_2 & B_2\end{bmatrix}=n. \tag{3}$$

其中 E_1 行满秩，且 E_1,A_2 和 B_2 定义如下：

$$U^*(sE-A,B)\triangleq\begin{bmatrix}sE_1-A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{bmatrix}. \tag{4}$$

本文于1988年12月8日收到．

这里 * 表示共轭转置.

与(3)式等价的另一条件是[4]：存在 $K \in R^{m\times n}$ 使得

$$\mathrm{degdet}(sE - A - BK) = \mathrm{rank}\, E. \tag{5}$$

(iii) θ 为 R-能控且

$$\mathrm{rank}(E, B) = n. \tag{6}$$

另一类是 Cobb[4],严拱天[3]等提出的建立在矩阵束的 Kronecker 分解基础之上的判据.

再一类是许可康[2]发展的利用奇异摄动系统的降阶形式给出的有关判据. 还有一些其它判据,这里就不一一列举了.

二、能控性及正则束条件的数值判定

首先引入行(列)压缩变换的定义[10],设 A 为任一 $m\times n$ 维矩阵,则由文献[10]知总存在酉变换 U 和 V 使得

$$U^*A \triangleq \begin{bmatrix} A_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad 及 \quad AV \triangleq [A_c\ \ 0]. \tag{7}$$

其中 $A_r(A_c)$ 为行(列)满秩阵,称 $U(V)$ 为 A 的行(列)压缩变换. 当 A 为实矩阵时，还可将 U 和 V 取为实正交阵. Dooren[10] 证明了对矩阵束实施这样的变换具有数值稳定性. 下面就利用这一性质先给出一个判别正则束条件(1)式的算法. 其中有关的行(列)压缩变换的具体求法参见文献[10].

算法 1.

第 1 步. 置 $(E_0, A_0) := (E, A)$,取行压缩变换 U 使得

$$U^*(E_0, A_0) = \begin{bmatrix} E_r & A_{r1} \\ 0 & A_{r2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\rho \\ \}\mu \end{matrix}. \tag{8}$$

其中 $\mathrm{rank}\, E_r = \rho$. 若 $\mu = 0$,则正则束条件成立,停止计算,而若 $\mathrm{rank}\, A_{r2} \neq \mu$,则正则束条件必不成立,故亦停止计算. 否则进行下一步.

第 2 步. 取列压缩变换 V 使得

$$\begin{bmatrix} E_r & A_{r1} \\ 0 & A_{r2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & \\ & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_{rc} & A_1 & A_{rc} \\ \underbrace{0}_{\rho} & \underbrace{0}_{\mu} & \underbrace{0}_{\rho} & \underbrace{A_c}_{\mu} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

由于 $\mathrm{rank}\, A_{r2} = \mu$，所以上述变换总是可以实现的. 否则若 $\rho \neq 0$，则置 $(E_0, A_0) := (E_1, A_1)$ 并返回第 1 步. 而若 $\rho = 0$,则 $sE - A$ 为一单位模阵,正则束条件显然成立,故停止计算.

注记 1. 显然上述算法还同时提供了一个判定 $sE - A$ 是否单位模阵的算法，并在有限 ($\leqslant n$) 步内即可完成. 这里以及本文后面的算法中凡判断有关矩阵秩条件时,均可用矩阵奇异值[10]判断，特别地可以用毛剑琴[9]所提出的数值秩进行判别,这种方法能更本质地反映矩阵的奇异程度，并且有很好的数值稳定性. 若不想进行较为困难的奇值分解

运算,则亦可按 Dooren[10] 所建议的那样进行 Housholder 变换.

为了引入下面的算法 2，先对广义系统能控性的判定进行一些必要的分析. 按现有的一些判据对能控性进行数值判断时会遇到如下一些问题.

第二类方法(见引言)需要用到矩阵束的 Kronecker 分解. 虽然现在已经有了产生上述分解的数值稳定的算法[10]，但这种标准形的计算量是很大的. 第三类方法虽然所用到的中间变换较为简单,但出现了对矩阵求逆问题,一般而言从数值计算的角度来看是应尽量避免的，尤其是矩阵的“病态”性质较为严重的情况下[11]. 至于第一类方法尽管比较直接,而且判定条件(4)式和(6)式亦比较方便,但关于条件(2)式

$$\mathrm{rank}(sE - A,\ B) = n,\ \forall s \in C,$$

的判别目前却似乎并无良策. 一般而言，若设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 为 (E, A) 的全部广义特征值,则只须判断

$$\mathrm{rank}(\lambda_i E - A,\ B) = n,\ i = 1, 2, \cdots, r. \tag{10}$$

即可. 为了做到这一点,首先必须求取特征值 λ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$. 而这即使在 $E = I$ 的情况下也并非易事，且特征值对矩阵的微小扰动十分敏感[9,11]. 如文献[9]中给出的例 1 即足以说明问题. 至于针对随机的 K 去验证(5)式更是有些不可思议. 然而,绕过求取特征值(也不做 Kronecker 分解) 仅用行(列)压缩变换进行简单的处理即可获得一个改进的算法. 这个算法加上判别式(4)和式(6)一起就分别构成了强能控和完全能控性的判别算法. 在下述算法 2 中,不失一般性,设 $B \neq 0$.

算法 2.

第 1 步. 置 $(E_0, A_0, B_0) := (E, A, B)$,并取行压缩变换 U 使得

$$U^T(E_0, A_0, B_0) = \begin{bmatrix} E_{r1} & A_{r1} & B_r \\ E_{r2} & A_{r2} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\rho \\ \}\mu \end{matrix}. \tag{11}$$

其中 $\mathrm{rank}\, B_r = \rho$. 若 $\rho = B_0$ 的行数，则系统 θ 必 R-能控，故停止计算. 否则进行下一步.

第 2 步. 取列压缩变换 V 使得

$$\begin{bmatrix} E_{r1} & A_{r1} & B_r \\ E_{r2} & A_{r2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & & \\ & V & \\ & & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_c & E_{rc} & A_c & A_{rc} & B_r \\ \underbrace{0}_{\rho} & \underbrace{E_1}_{\mu} & \underbrace{B_1}_{\rho} & \underbrace{A_1}_{\mu} & 0 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

由于 $\mathrm{rank}\, E_{r2} \leqslant \mu$，所以上述变换总是可行的,此时显然若 $B_1 = 0$，$sE - A$ 为一非单位模阵,取 $s = \lambda_0$ 为 (E_1, A_1) 的广义特征值,则 $\mathrm{rank}(sE - A, B) < n$,从而系统 θ 必 R-不能控，故停止计算. 而若 $sE - A$ 为一单位模阵，则 θ 显然 R-能控，故亦停止计算. 否则若 $B_1 \neq 0$,则置 $(E_0, A_0, B_0) := (E_1, A_1, B_1)$,并返回第 1 步.

注记 2. 上述算法显然在有限($\leqslant n$)步内完成，且其正确性是不难证明的，因为上述算法所产生的结果实质上是呈块对角的(若写成矩阵束形式的话)，从而每一步都是相互解耦的. 由此易知其正确性.

三、结束语

本文利用行列压缩变换给出了广义系统能控(观)性的一类较好的数值判据算法。但由于条件所限，未能进行大型数值仿真，因此在较大程度上削弱了本算法的可靠性。

参考文献

[1] 王朝珠，戴立意，广义动态系统，控制理论与应用，**3**(1986)，1，144—152.

[2] 许可康，广义状态空间系统的强能控性和强能观性，控制理论与应用，**2**(1985)，2，82—91.

[3] 严拱天，广义动力学系统的可控性与可观性，控制理论与应用，**2**(1985)，2，33—44.

[4] Cobb, D., Controllability, Observability and Duality in Singular Systems, *IEEE* ***T-AC***, **29**(1984), 1976—1082.

[5] Yip, E. L. and Sincovec, R. F., Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems, *IEEE* ***T-AC***, **29**(1984), 702—707.

[6] Verghese, G. L., et al., A Generalized State Space for Singular Systems, *IEEE* ***T-AC***, **26**(1981), 811—830.

[7] 杨成梧，邹云，广义系统能控性的鲁棒性，华东工学院学报，**45**(1988)1，1—11.

[8] 杨成梧，邹云，广义系统的最小能控结构，自动化学报，**15**(1989)，2，142—148.

[9] 毛剑琴，线性系统能控性、能观性的数值判断，控制理论及应用，**3**(1986)，1，58—66.

[10] Dooren, P. V., The Generalized Eigenstructure Problem in Linear System Theory, *IEEE* **T-AC**, 26(1981), 111—128.

[11] Wilkinson, J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford Univ. Press, London, (1965).

[12] Eising, R., Between Controllable and Uncontrollable, *Syst. Contr. Lett.*, 4(1984), 5, 263—264.

A NUMERICAL CRITERION FOR THE REGULAR PENCIL CONDITION, CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY OF SINGULAR SYSTEMS

Yang Chengwu　　Zou Yun

(East China Institute of Technology)

Abstract

In this paper, we have proposed an algorithm for the verification of the regular pencil condition and controllability and observability of singular systems. This algorithm has the properties of small error and good numerical stability.

Key words: Linear systems; singular systems.