第17卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 5
1991年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1991

基于边界建模的鲁棒控制方法[1)]

张 珩 疏松桂
(中国科学院自动化研究所,北京)

摘 要

本文运用边界建模思想,提出了含不确定性因素线性系统的鲁棒控制设计的新方法. 文中给出了不确定性系统时域边界模型的定义. 对于受控系统在很弱的时域假设下,通过模型化边界定量地限制出一类未知过程,并据此构造出鲁棒控制策略.

关键词: 系统鲁棒性,鲁棒控制,边界建模.

一、概 述

近年来,随着对系统理论研究的不断深入,对含有不确定性因素过程的鲁棒控制问题重新得到重视. 这些不确定性因素可以认为是由两种原因造成的. 其一是过程内部含有一些缓时变有规律又难于描述的参数,或某些随机常数,由于它们难以在一次或几次样本中完全表现出其性态,故所建立的数学模型就无法表征这些不确定参数调制出的特性. 此外,还有一类系统,虽然它们是完全确定过程, 但由于现有的系统辨识及模型技术的局限性,故无法获得精确的模型表达,从而造成理论模型与数学模型的差别. 上述两种现象都可归结为系统的不确定性. 由于在许多情形下这种不确定性是不可避免的, 因此寻求能够容忍这些不确定性因素变化的鲁棒控制方法,以保证一定的闭环性能,被认为是控制领域中所面临的最严峻的挑战性课题之一.

与确定性系统的研究相对应, 对不确定环境下的系统的分析也大都从频域或代数角度进行. 在最初引入鲁棒性问题时,其概念[1]与小参数变分理论十分类似. 但近年来, 在频域中基于参数寻优的 H^{∞}- 最优化方法有了突破性的结果[2-3]. 除此之外,代数方法的研究也很引人注目[4-9]. 但从机理上讲, 大多数现有系统的设计方法都有一个共同特征, 即受控过程都被假定为已结构化,用理论的结构化模型去匹配一个实际过程是十分困难而复杂的, 而且目前许多设计实例已表明这种做法并不成功. 这意味着必须将理论模型定义在一个非唯一元素的集合上, 以弥补对过程了解的不足. 基于这种理由, 建立鲁棒控制的非模型化方法就显得更为必要和有意义.

本文将提出能够实现鲁棒控制的非模型化方法. 对于含有未知的不确定性因素的系统,通过建立其时域特性的定量函数, 找出未知受控过程的非模型化前提假设[9], 并据此

本文于1989年3月1日收到.
1) 国家自然科学基金资助项目.

得到受控过程族的频域特性估计．这些定量的边界估计将被用以显式地确定出相应的鲁棒控制族．整个求界过程十分简洁．

二、过程的定义

考虑实函数 $f(t)$: $R_+ \to R^1$，并定义

$$R(f,\omega) = \int_{R_+} f(t)\cos(\omega t)dt, \tag{2.1}$$

$$I(f,\omega) = \int_{R_+} f(t)\sin(\omega t)dt, \tag{2.2}$$

则 $W(f,j\omega) = R(f,\omega) - jI(f,\omega): R_+ \times R^1 \to C^1(jR_+)$，$j=\sqrt{-1}$，对于 $R_+ \times R^1$ 上的任意无穷可积函数 $f(t)$，$W(f,t)$ 就可定义出其 Fourier 变换．

令 $U \subset R^1$ 及 $Y \subset R^1$ 分别为输入及输出函数空间，并用符号 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 表征未知参数定义在参数集 $\boldsymbol{P}$（其有适应的维数）上的一个系统，则一个严格依赖于参数 $p \in \boldsymbol{P}$ 的时间函数 $h(t,p)$: $U \to Y$ 满足

$$y(t,p) = \int_0^\infty h(t-\tau,p)u(\tau)d\tau,$$

在 $p \in \boldsymbol{P}$ 上就构成 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的核函数族．这样，鲁棒控制问题可叙述为：构造一个物理可实现的算子 $\sigma_c^0: Y_r - Y \to U$，使得由此而生成的 $y(t) \in Y$ 满足 $|y_r(t) - y(t)| < \infty$，$y_r(t) \in Y_r$ 及 $p \in \boldsymbol{P}$．这里，Y_r 为过程的期望输出集．进一步地，若存在一个已知的算子 $\sigma_0: Y_r \to Y$ 定义的子类 $Y_D = \{y(t) \in Y \mid \sigma_0^{-1}[y(t)] = 0,\ \forall t \in R_+\}$，则当 σ_c^0 可分解为 $\sigma_c^0 = \sigma_0\sigma_c$ 时，还将有 $y_r(t) - y(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$．

实际上，σ_0 还有更深的内涵．在上述阐述中没有考虑过程 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 中的附加干扰项．但一般可将它更为广泛地定义，以使这些附加的外界干扰均属于 Y_D．鉴此，σ_0 就成为通常意义下的“内模”[10]或外干扰的“加权模型”[2-3]． 为简化描述，默认 σ_0 具有这样的性质．

基于上述的讨论，将由 $\Sigma(\boldsymbol{P})$，σ_0 及 σ_c 构成闭环系统．为保证问题的可解性，在本文的研究中，假设 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 满足下述条件：

1）$\boldsymbol{P}$ 为非唯一元有界集；

2）σ_c，σ_p（其核函数即为 $h(t,\boldsymbol{P})$）渐近稳定，$\forall p \in \boldsymbol{P}$；

3）$\max\{\sigma_c[\delta(t)],\ \sigma_0^+[\delta(t)]\} < \infty$；

4）$Y_r \subset Y_D \subset Y$；

5）$Y_r - Y \subset U$；

6）有一已知正常数

$$H_0 \leqslant \inf \int_{R_+} h(t,\boldsymbol{P})dt,$$

其中 $\delta(t)$ 为 δ- 函数．

三、$\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的时域边界模型及其频域特性的估计

令 $W_0(s)$，$W_c(s)$ 分别为 σ_0 和 σ_c 的频域表示，由于 $\boldsymbol{P}$ 为闭集，故 $h(t,\boldsymbol{P})$ 必存

在有下确界 $h_i(t) = \inf h(t,\boldsymbol{P})$ 及上确界 $h_s(t) = \sup h(t,\boldsymbol{P})$. 从而,必然存在一实函数偶 $[h_a(t), h_0(t)]^T$ 满足

$$\sup|h(t,\boldsymbol{P}) - h_a(t)| < h_0(t). \tag{3.1}$$

因此，任何满足(3.1)式的函数偶 $[h_a(t),\ h_0(t)]^T$ 均定义为 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的一个时域边界模型. 一般地,函数偶 $[h_a(t),\ h_0(t)]^T$ 的存在条件为

$$h_a(t) + h_0(t) > h_s(t), \tag{3.2a}$$

$$h_a(t) - h_0(t) < h_i(t). \tag{3.2b}$$

鉴此，可将关于 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的时域边界模型的定义叙述为：若 $[h_a(t),\ h_0(t)]^T$ 同时满足(3.1)式及(3.2)式,则它为 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的一个时域边界模型.

显而易见,在上式所定义的过程的边界模型中,比在 $\{h_i(t),\ h_s(t)\}$ 范围内搜索 $h(t, p)$ 的轨线及 $h_0(t)$, $h_a(t)$, H_0 的描述要更为容易，亦直接引入了不确定性的某种量度. 因此,如基于边界模型设计出控制器,则它一定是鲁棒的,而不必再加验证.

令 $W(j\omega,p) = W[h(t,p),j\omega]$, 用 ω^* 表示 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的频域不确定函数族 $W(j\omega, \boldsymbol{P})$ 首次穿越复平面虚轴时角频率点集的下确界,且 $\Omega^* = [0,\omega^*]$.

定理 1. 考虑 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的频域不确定函数族 $W(j\omega,\ \boldsymbol{P})$, 对于任意的 $p\in \boldsymbol{P}$, 恒有 $W(j\omega,p) > R_0(\omega)$. 式中

$$R_0(\omega) = W(h_a,j\omega) - \min\{\int_{R+} h_0(t)|\cos(\omega t)|dt,$$

$$\int_{R+} h_0(t)\int_0^{\omega t}|\sin\theta|d\theta dt + \int_{R+1} h_a(t)dt - H_0\}.$$

定理 1 的证明见文献[9],在此从略. 在(3.2)式的条件下,(3.1)式完整地限制了系统 $\Sigma(\boldsymbol{P})$. 尽管无从得到 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的名义定量模型 $\Sigma(p_0)$, 但仍可得到它的频域估计. 注意到 Ω^* 的定义,则由定理 1 可容易地得到以下推论.

推理 1. $\omega_0\in\Omega^*$. 其中 ω_0 为方程 $R_0(\omega) = 0$ 的最小正数解.

由于不确定性的存在,只能找到 Ω^* 的一个子集 $\Omega_0 = [0,\omega_0]$, 即 $\Omega_0\subset\Omega^*$. 同样地,还可以构造出 $W(j\omega,\boldsymbol{P})$ 在 Ω_0 内的绝对相位的定量上界. 设

$$I_0(\omega) = I(h_a,\ \omega) + \min\{\int_{R+} h_0(t)|\sin(\omega t)|dt,$$

$$\int_{R+} h_0(t)\int_0^{\omega t}|\cos\theta|d\theta dt\}, \tag{3.3a}$$

$$\theta_0(\omega) = \mathrm{tg}^{-1}[I_0(\omega)/R_0(\omega)], \tag{3.3b}$$

$$G_0(\omega) = |W(ha,j\omega)| + \int_{R+} h_0(t)dt, \tag{3.3c}$$

因 $\inf\mathrm{Re}W(j\omega,\boldsymbol{P}) > R_0(\omega)$, $\sup I_m W(j\omega,\boldsymbol{P}) < I_0(\omega)$, 则必有 $\sup|\angle W(j\omega,\boldsymbol{P})| < \theta_0(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega_0$. 类似地,还有 $\sup|W(j\omega,\boldsymbol{P})| < G_0(\omega)$, $\forall\omega\in R_+$.

四、$\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的鲁棒控制

基于边界模型,已得到 σ_p 的频域估计. 这样就使得 σ_c 的求解成为可能. 由于假定 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 具有性质 2)及 3),则问题的可解性是显然的. 因此，由 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的时域边界模型

所得到的频域边界知识将成为决定 $\Sigma(\boldsymbol{P})$ 的控制策略的重要依据.

定理 2. 若

1) $|\angle W_c(j\omega)+\angle W_0(j\omega)|\leqslant\pi+\theta_0(\omega),\ \forall\omega\in\Omega_0,$ (4.1a)

2) $G_0(\omega)|W_0(j\omega)||W_0(j\omega)|\leqslant 1,\ \forall\omega\in(\omega_0,\infty),$ (4.1b)

则闭环系统渐近稳定.

证明. 由 $\sup|\angle W(j\omega,\boldsymbol{P})|<\theta_0(\omega),\ \forall\omega\in\Omega_0$ 及条件 1) 可得

$$\sup|\angle[W(j\omega,\boldsymbol{P})W_0(j\omega)W_c(j\omega)]|<\pi,\ \forall\omega\in\Omega_0.$$

另一方面,因 $\sup|W(j\omega,\boldsymbol{P})|<G_0(\omega),\ \forall\omega\in R_+$, 再利用条件 2) 亦有

$$\sup|W(j\omega,\boldsymbol{P})W_0(j\omega)W_c(j\omega)|<1,\ \forall\omega\in(\omega_0,\infty).$$

运用熟知的 Nyquist 判据,立即得知结论成立.

五、例 子

考察文献 [22] 中研究的具有两个不确定参量 $P=[ab]$ 的系统 $\Sigma(\boldsymbol{P})$, 其核函数为

$$h(t,p)=a|(a-1)(b-1)|e^{-(0.3+a)t}+|b-0.6|(\cos bt+0.4\sin bt)e^{-0.6t}$$

及 $W_0(s)=1/s$, $\boldsymbol{P}=[0.1,4]\times[0,3]$, $H_0=1$. 由图 1 可看出这一系统的变化相当复杂. 其相应的上、下确界见图 2 所示. 令 $h_a(t)=0.5[h_s(t)+h_i(t)]$, $h_0(t)=0.5005\times[h_s(t)-h_i(t)]$, 则 $\omega_0=0.49$, $\max\{G_0(\omega)/\omega,\ \forall\omega\in(\omega_0,\infty)\}=0.6208$. 鉴此, 选

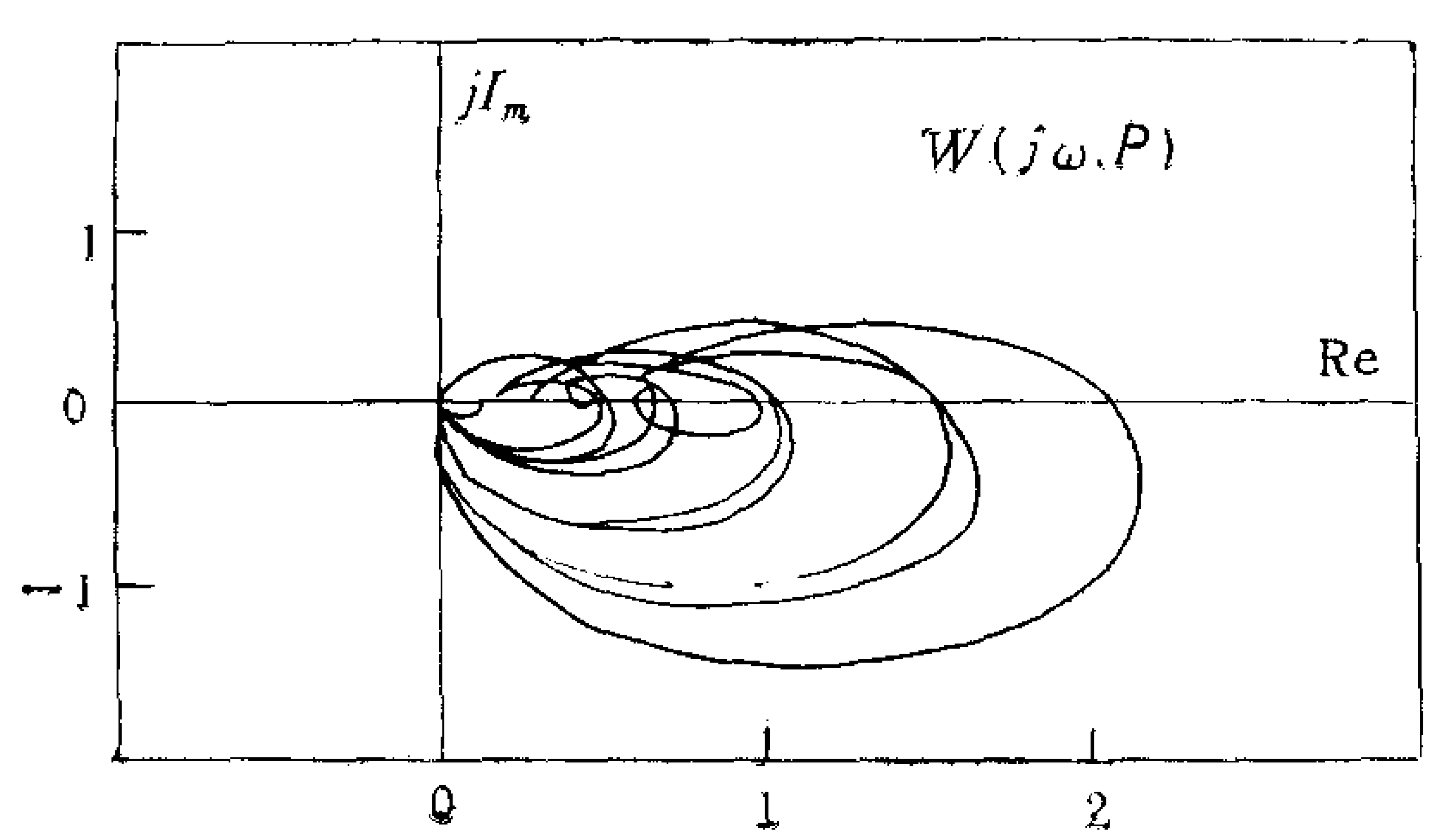

图 1

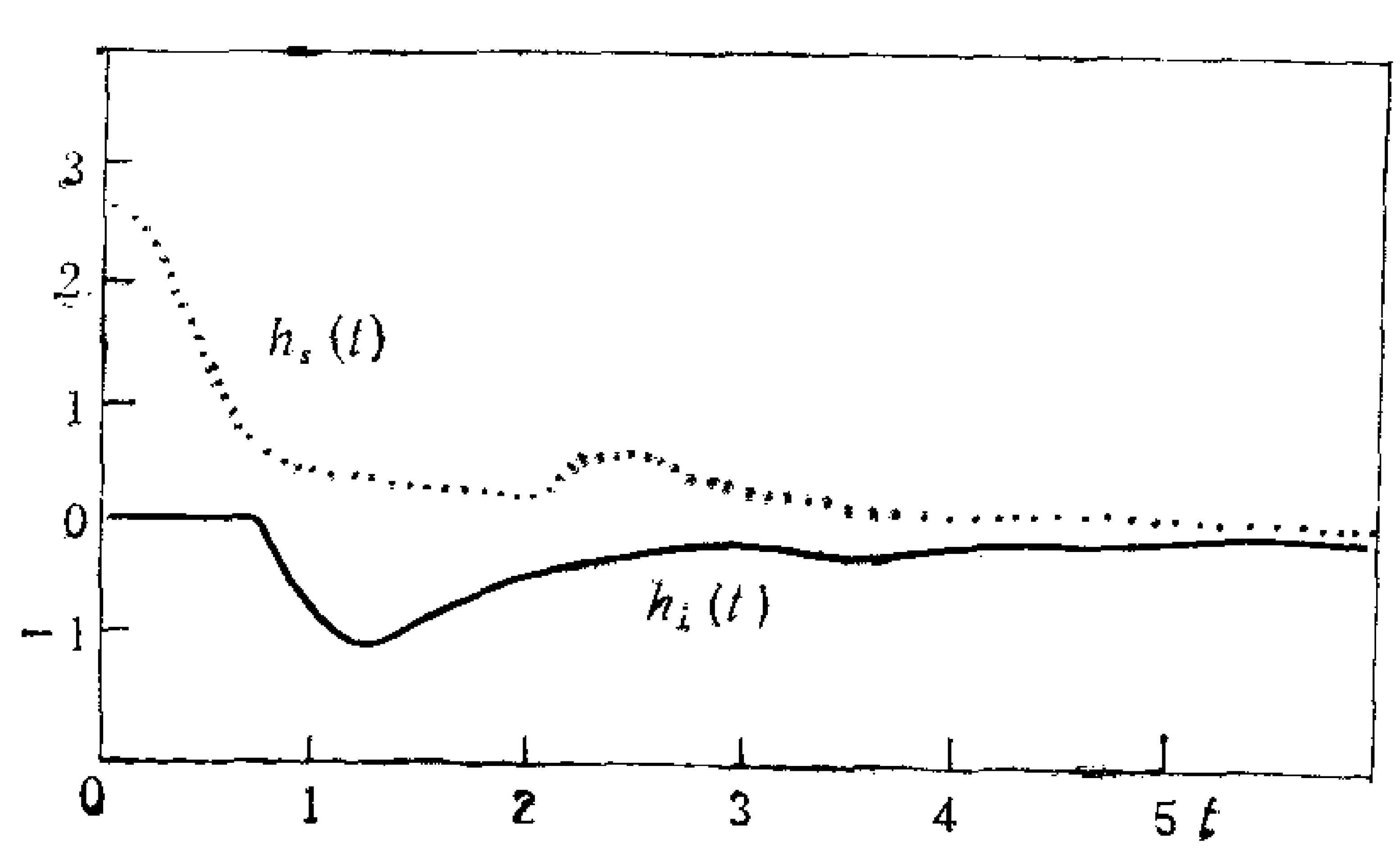

图 2

择 $W_c(s)=(1+a_1s)/(1+a_2s)$. 由定理 2 可获得其参数条件，现绘于图 3. 其中阴影区表示可选的参数范围. 图 4 则给出了在 $a_1=0.3$, $a_2=0.2$ 时, $W_0(j\omega)$ $W_c(j\omega)$ $W(j\omega,\boldsymbol{P})$ 的 Nyquist 曲线族.

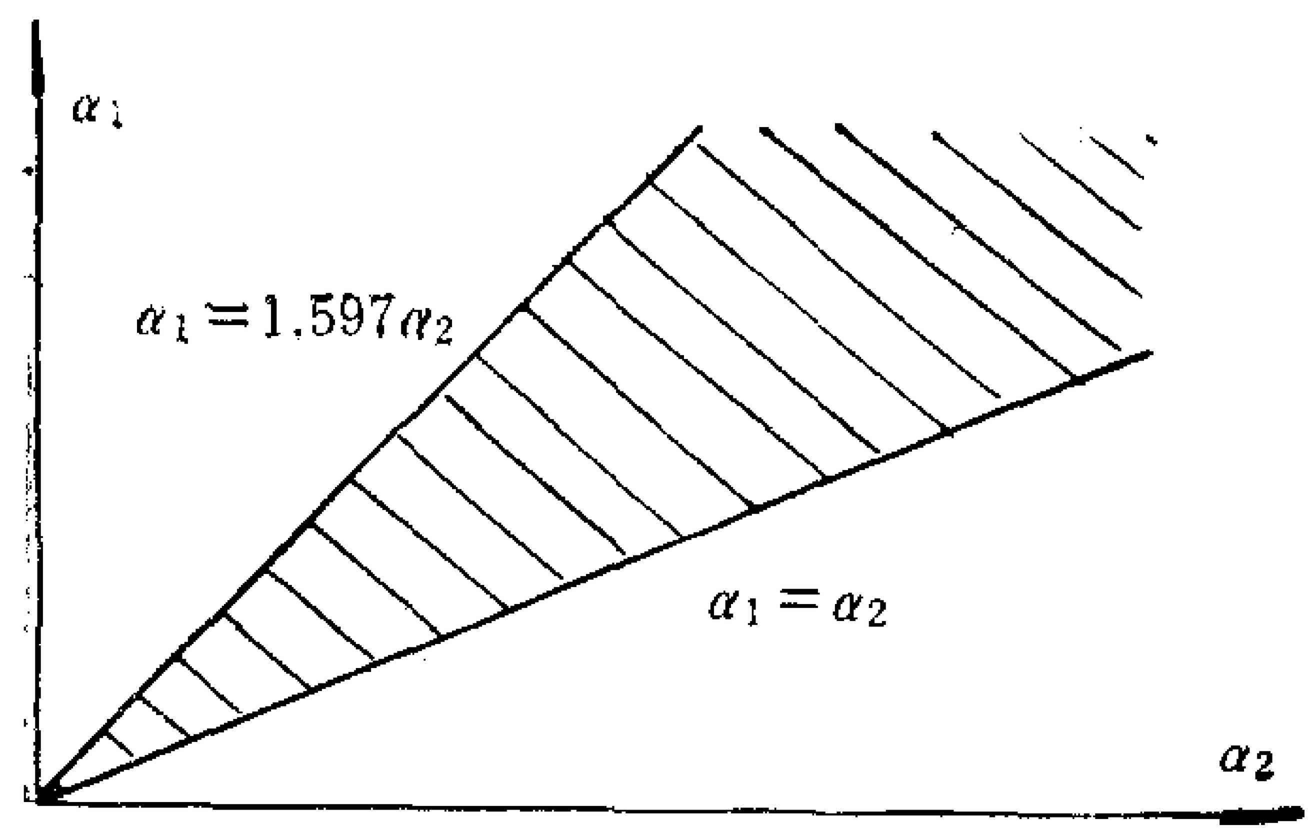

图 3

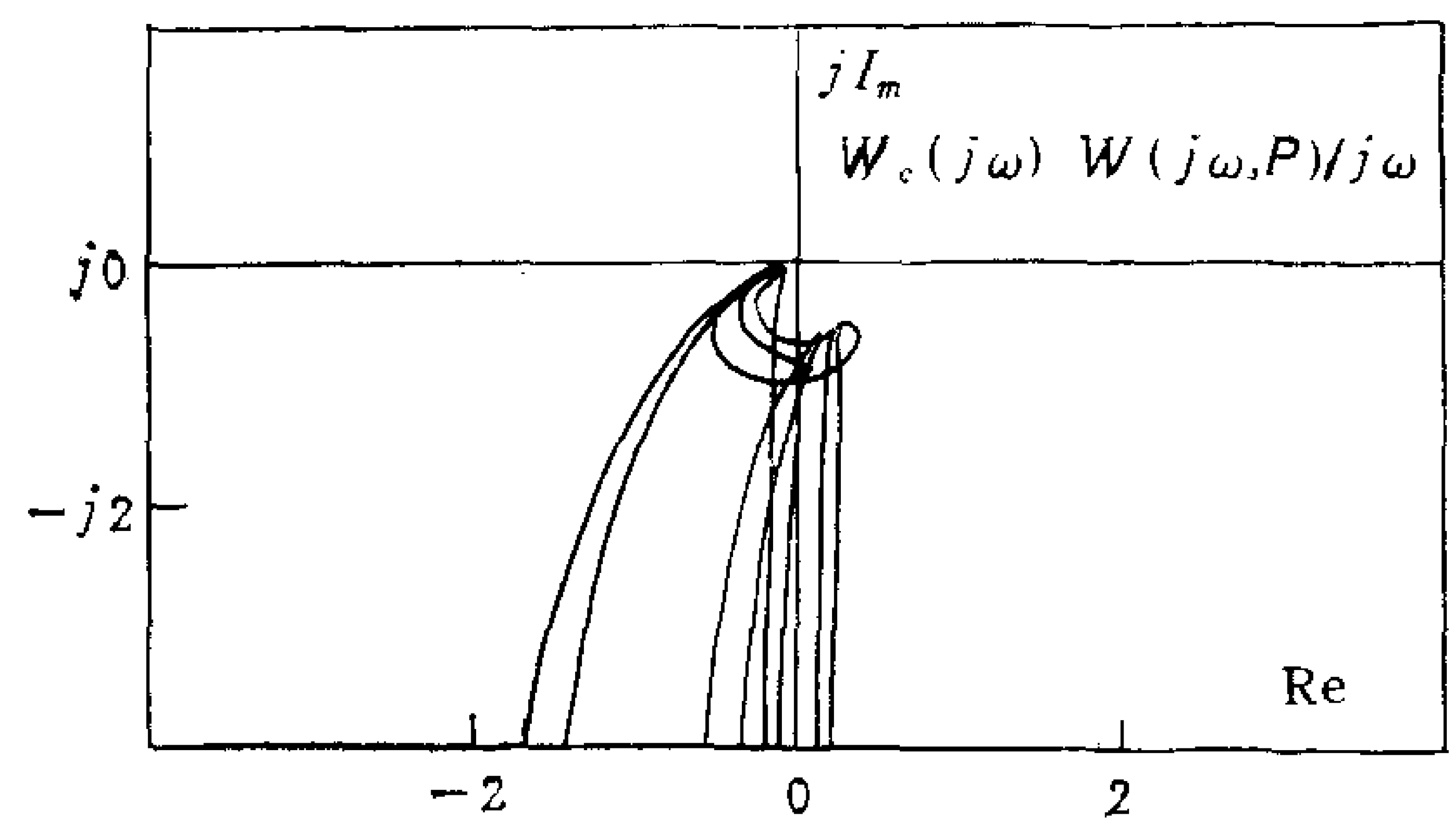

图 4

六、结 束 语

本文提出了含有不确定性因素线性系统的鲁棒控制方法. 文中给出了不确定系统的时域边界模型的定义. 研究结果表明，当系统的不确定性难以量化确定时，基于边界定量建模仍能构造出寻求控制策略的定量知识. 与现有的其它方法不同，这里没有任何定量的名义模型作为参考，因此文中的方法实际上是将不确定性的某种测度直接作为控制设计的依据，从而使得鲁棒镇定问题得以简单解决.

参 考 文 献

[1] Davison, E. J., The Robust Control of a Servo-mechanism Problem for Linear Time Invariant Multivariable Systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **AC-21**(1976), 25—34.

[2] Khargonekar, P. P., Geogiou, T. T. and Pasoal, A. M., On the Robust Stabilizabinity of Linear Time Invariant Plants with Unstructural Uncertainty, *IEEE Trans Aut. Contr.*, **AC-32**(1987), 201—207.

[3] Kwakernaak, H., Robustness Optimization of Linear Feedback System, Proc. 22nd IEEE Conf. Deci. Contr., 618—624, San Antonio, TX, 1983.

[4] Peterson, I. R. and Hollof, C. V., A Riccati Approach to the Stabilization of Uncertain Linear System, *Automation*, **22**(1986), 397—411.

[5] Thorp, J. S. and Barmish, B. R., On Guaranteed Stability of Uncertain Linear Systems via Linear Control, *J. Opt. Theory Applic.*, **35**(1981), 551—566

[6] Kosmidou, O. I. and Bertrand, P., Robust Controller Design for Systems with Large Parameter Variations, *Int. J. Contr.*, **45**(1987), 927—938.

[7] Zhang, H. and Shu, S. G., Analytic Approach to Quadratic Control with Prescribed Relative Stability, *Int. J. Contr.*, **48**(1988), 1843—1850.

[8] Zhang, H. and Shu, S. G., Analytic Design of Robust Stabilization for Linear Continuous Systems with Uncertain Parameters, *IEEE* 28th Conf. Deci. Contr., Tampa, Florida, 1989.

[9] Zhang, H. and Shu, S. G., Linear Robust Control, A Nonmodelistic Method, Proc. IEEE Int. Conf. Contr. Applic., Israel, 1989.

[10] Wonham, W. M., Linear Multivariable Control, A Geometric Approach, New York, Spring-Verlag, 1974.

BOUNDED MODELING-BASED APPROACH FOR ROBUST CONTROL

ZHANG HENG SHU SONGGUI
(Institute of Automation, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, a new approach for robust control of liner systems with uncertainties is proposed based on bounded modeling Under rather weak assumptions in time-domain, bounded model is used to quantitively construct knowledge of the uncertain plant to be controlled and then to determine robust control.

Key words: System robust; robust con rol; bounded modeling.