第17卷 第5期 | 自 动 化 学 报 | Vol. 17, No. 5
1991 年 9 月 | ACTA AUTOMATICA SINICA | Sept., 1991

一类关于鲁棒性和敏感性的泛函的优化

胡庭姝　施颂椒　张钟俊
（上海交通大学自动控制系）

摘　　要

本文给出了一类泛函的优化方法．这类泛函包括反映系统鲁棒性和敏感性的目标函数．其优化是通过一 $R^{m\times n}\to R^{m\times n}$ 的映射来实现的．该映射将所有配置系统极点的反馈矩阵参数化为一自由矩阵变量的函数．

关键词： 鲁棒性，H^∞-敏感性，极点配置，状态反馈

一、一类泛函的提出

1. 关于 H^∞-敏感性的目标函数

对于 $G(s)\in H^\infty$，其 H^∞-范数为

$$\|G\|_\infty:=\sup_\omega\bar{\sigma}[G(j\omega)]. \tag{1}$$

设开环系统具有状态空间，并可描述为

$$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+Dv,\\ z=E_1x+E_2u,\end{cases} \tag{2}$$

其中 x 为状态，u 为控制输入，v 为干扰，z 为被控输出．设系统状态完全可测，经过状态反馈 $u=Fx$，从 v 到 z 的传递函数为

$$T_s(s)=(E_1+E_2F)(sI-A-BF)^{-1}D. \tag{3}$$

若将目标函数取为 $J=\|T_s(s)\|_\infty$，文献[1]中有关于 J 的最小化方法．但当 J 趋向于下限时，F 有无限增大的趋势，同时闭环极点无限远离虚轴[5]．本文首先将 $A+BF$ 的特征值固定．当系统为多输入时，使 $A+BF$ 特征值为给定的 F 有无穷多．以下将讨论如何在极点限制条件下使 J 的最小化的问题．

利用文[2]的结论：

$$\|T_s(s)\|_\infty=\sup\left\{k:\begin{bmatrix}-(A+BF)' & -(E_1+E_2F)'(E_1+E_2F)\\ DD'/k^2 & A+BF\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.\text{在虚轴上有特征值}\right\}. \tag{4}$$

用 V 表示 $A+BF$ 的特征向量矩阵，令 $T=V^{-1}$，假设给定极点中没有相重的，则 $A+BF$ 可对角化为 $T(A+BF)V=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n]:=A_1$．

通过相似变换及取倒数变换可知

本文于1990年3月20日收到．

$$\frac{1}{\|T_s(s)\|_\infty} = \sup\left\{r_0:\text{当 } r < r_0 \text{ 时，} \begin{bmatrix} -A_1' & -rV'(E_1+E_2F)'(E_1+E_2F)V \\ rTDD'T' & A_1 \end{bmatrix}\right.$$

$$\left.\text{在虚轴上没有特征值}\right\}. \tag{5}$$

在极点配置的限制下，A_1 为给定对角阵．因而使 $\|T_s(s)\|_\infty$ 最小等效于选择 F,V,T，使

$\sup\{r_0: r_0$ 同上式$\}$最大．限制条件为

$$T(A+BF)V = A_1,\ T = V^{-1}.$$

这一优化问题，与鲁棒设计中使参数变化范围最大的设计目的相似．若将

$$J_s = \frac{1}{2}\|TD\|_F^2 \cdot \|(E_1+E_2F)V\|_F^2 \tag{6}$$

$\left(\text{其中 } \|Q\|_F := \left(\sum_i \sum_j |Q_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$提为目标函数，则 J 近似地反映了 $\|T_s(s)\|_\infty$ 的大小，虽然并不完全一致．已做过的算例都说明了这一点，即当 J 减小时，$\|T_s(s)\|_\infty$ 也呈下降的趋势．

2. 关于鲁棒性的目标函数

1）非结构型的不确定系统

设闭环系统的状态方程为 $\dot{x} = Qx$．设 Q 经参数扰动变为 $Q+E$，使闭环系统成为

$$\dot{x} = (Q+E)x. \tag{7}$$

如果 $\bar{\sigma}[E] < \min_\omega \underline{\sigma}[Q - j\omega I]$，则系统(7)鲁棒稳定．在式(2)加反馈后的系统中，$Q = A + BF$．文献[4]证明了在 $A+BF$ 的特征值为固定的限制下，当 $\|A+BF\|_F$ 最小时，$\min_\omega \underline{\sigma}[Q - j\omega I]$ 最大，即系统鲁棒性最好．这样，可直接将目标函数提为

$$J_R = \frac{1}{2}\|A+BF\|_F^2.$$

2）结构式的不确定型

设不确定系统为

$$\dot{x} = (A + rA_\alpha)x + (B + rB_\alpha)u, \tag{8}$$

r 为不确定参数，在系统名义工作点，$r_0 = 0$．

在状态反馈 $u = Fx$ 下，

$$\dot{x} = [A + BF + r(A_\alpha + B_\alpha F)]x. \tag{9}$$

经相似变换

$$A + BF + r(A_\alpha + B_\alpha F) \sim A_1 + rT(A_\alpha + B_\alpha F)V,$$

其中 A_1, V, T 的定义同前．要使 r 的允许变化范围最大，可将目标函数取为

$$J_R = \frac{1}{2}\|T(A_\alpha + B_\alpha F)V\|_F^2$$

3. 一般泛函

综合 1，2，可得一般泛函的通式为

$$J = \prod_i \|S_i(F,V,T)\|_F^2,$$

其中 $S_i(F,V,T)$ 表示 F,V,T 和常数矩阵加、减、乘的运算. 这样,一般的优化问题为

$$\min \prod_i \|S_i(F,V,T)\|_F^2,\ \text{subject to: } A+BF \text{ 的特征值为指定.} \tag{10}$$

设给定特征值没有相重的,则以上限制条件可改为

$$T(A+BF)V = A_1 = \mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n] \tag{11}$$

下节将通过 F,V,T 的参数化解除优化问题(10)的约束.

二、F,V,T 的参数化

首先引入一个 $R^{m\times n}\to R^{m\times n}$ 的映射及一个 $R^{m\times n}\to R^{n\times n}$ 的映射.

定义. 设 (A,B) 可控, A_1 为一对角阵,具有所给的特征值 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$. A 与 A_1 无相同特征值. 则可将一 $R^{m\times n}\to R^{m\times n}$ 的函数 f 和 $R^{m\times n}\to R^{n\times n}$ 的函数 f_0 定义如下:

给定自变量 $U\in R^{m\times n}$, 如果方程

$$AV - VA_1 = -BU \tag{12}$$

的解 V 非奇异,则 $F=UV^{-1}$ 是 U 在 f 下的象,而 V 是 U 在 f_0 下的象,记为 $F=f(U)$, $V=f_0(U)$. f 的定义域为所有使式(12)的解 V 非奇异的 U 的集合,记为 D_f.

以下定理说明,根据以上定义,可将满足条件(11)的 F,V,T 参数化为 $U\in R^{m\times n}$ 的函数.

定理 1. f 的值域就是所有使 $A+BF$ 与 A_1 相似的 F 集, f_0 的值域就是 $A+BF$ 的特征向量矩阵的集合,且有 $V^{-1}(A+BF)V=A_1$. 另外,假设 f 的定义域非空, 则其为 $R^{m\times n}$ 空间中一稠的开集.

以上定理的证明参见文献[3].

如果所要配置的极点中有共轭复根, 例如, λ_i, $\lambda_{i+1}=\alpha_i\pm j\beta_i$, 只需将 A_1 中的 $\mathrm{diag}[\lambda_i,\lambda_{i+1}]$ 改为 $\begin{bmatrix}\alpha_i, & -\beta_i\\ \beta_i & \alpha_i\end{bmatrix}$ 即可.

三、泛函的优化

第一节提出了一般的优化问题

$$\min J = \min \prod_i \|S_i(F,V,T)\|_F^2,$$

subject to: $T(A+BF)V=A_1$, $T=V^{-1}$.

由第二节所定义的函数,以上优化问题等效于:

$$\min J = \min_{U\in D_f} \prod_i \|S_i[f(U),f_0(U),f_0(U)^{-1}\|_F^2. \tag{13}$$

可以证明,由于 $S_i(F,V,T)$ 是 F,V,T 及其它常数阵加减乘的运算, 这类泛函的

梯度都可求出．由于 D_f 是开集，对所有 $U \in D_f$，$\partial J/\partial U$ 都有意义．

经过一系列推导证明，$\partial J/\partial U$ 有以下通式：

$$\frac{\partial J}{\partial U} = (XB)' + Q_2', \tag{14}$$

X 满足：$A_1X - XA = Q_1$．其中 Q_1, Q_2 为 F, V, T 及其它常矩阵加减乘的运算．

特别地，对于第一节中的目标函数，分别有以下梯度：

1） $J_s = \frac{1}{2}\|TD\|_F^2 \cdot \|(E_1 + E_2F)V\|_F^2$．

令 $S_1 = TD$，$J_1 = \frac{1}{2}\|S_1\|_F^2$，$S_2 = (E_1 + E_2F)V$，$J_2 = \frac{1}{2}\|S_2\|_F^2$，则 $J_s = 2J_1J_2$，

$\partial J_s/\partial U = 2J_1\frac{\partial J_2}{\partial U} + 2J_2\frac{\partial J_1}{\partial U}$．　而

$$\partial J_1/\partial U = (XB)',\ X\text{满足：}\ A_1X - XA = -TDS_1'T,$$

$$\partial J_2/\partial U = (YB)' + (S_2'E_2)',\ Y\text{满足：}\ A_1Y - YA = S_2'E_1.$$

2） $J_R = \frac{1}{2}\|A + BF\|_F^2$．

令 $S = A + BF$，则

$$\partial J_R/\partial U = (XB)' + (TS'B)',$$

X 满足：$A_1X - XA = -TS'BF$．

3） $J_R = \frac{1}{2}\|T(A_a + B_aF)V\|_F^2$．

令 $S = T(A_a + B_aF)V$，则

$$\partial J_R/\partial U = (XB)' + (S'TB_a)',$$

X 满足：$A_1X - XA = -SS'T + S'TA_a$．

因为自变量 U 属于 $R^{m\times n}$ 空间中稠的开集，J 可用梯度法优化．此类泛函可能有多个极值点．对有些特殊情况，可以证明，在 $\partial J/\partial U = 0$ 的点，J 的取值一样．这样，从任何初值都可求到 J 的最小值，尽管达到最小值的 F 和 U 可能不一样．在已做过的算例中，不同的初值导致了相同的极小值，梯度法寻优的收敛速度还是比较快的，限于篇幅，例子略．

参　考　文　献

[1] Zhou, K. and Khargonekar, P. P., An Algbraic Riccati Equation Approach to H^∞- Optimization, *Systems and Control Letters*, **11**(1988), 85—91.

[2] Boyd, S., Balakrishnan, V., Kabamba, P., On Computing the H^∞-Norm of a Transfer Matrix, Math. Control, Signals and Systems, (1989), No. 2.

[3] Hu, T. S., Shi, S. J., The Set of Feedback Matrices That Assign the the Poles of a Systems, MTNS-89, The Netherlands.

[4] Dickman, A., On the Robustness of Multivariable Linear Feedback Systems in State Space Representation, *IEEE Trans.*, **AC-32**(1987), 407—410.

[5] Scherer, C. H^∞ control by State Feedback, An Iterative Algorithm and Characterization of High Gain Occurence, *Systems and Control Letters*, **12**(1989), 333—391.

OPTIMIZING A CLASS OF FUNCTIONALS RELATED TO SENSITIVITY AND ROBUSTNESS

HU TINGSHU SHI SONGJIAO ZHANG ZHONGJUN

(Dept. of Automatic Control, Shanghai Jiao Tong University)

ABSTRACT

A method of optimizing a class of functionals is presented. This class of functionals includes performance indexes related to H^∞-sensitivity and robustness. The optimization is based on an $R^{m\times n} \to R^{m\times n}$ map which parametrizes all Fs that assign the poles of a system as a function of a free parameter in $R^{m\times n}$.

Key words: Robustness; H^∞-sensitivity; pole assignment; state feedback.