第17卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 5
1991 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1991

带有滞后影响的控制系统的变结构控制

胡跃明 周其节
(华南理工大学自动化系，广州)

摘 要

本文研究了带有滞后影响的控制系统的变结构控制问题，得到了系统的滑动方程式及与干扰无关的条件，并给出了综合方法.

关键词: 滞后系统，滑动模，变结构控制.

一、引 言

在许多实际控制系统中，不可避免地存在着滞后影响，例如，冷轧机[2]、分布式电感器[4]等. 在经济系统中，大型投资项目的滞后作用对于经济系统的预测与控制也是不可忽视的. 由于系统本身除了受滞后影响外，还存在着许多其它干扰因素，因此研究带有滞后影响的控制系统的鲁棒性与自适应性控制问题，日益受到人们的重视[2,4]. 本文利用变结构控制方法，研究了上述问题，得到了系统的滑动方程式及与干扰无关的条件，并给出了综合方法.

二、滑动方程式

考虑下列带有滞后影响的控制系统:

$$\dot{x}=\int_{-r}^{0}\eta(\theta)x(t+\theta)d\theta+Bu, \tag{1}$$

其中 $x\in R^n$ 是状态变量，$\eta(\theta)$ 是 $n\times n$ 有界变差函数矩阵， B 是 $n\times m$ 常数阵，$u\in R^m$ 是控制向量. 显然式(1)包含了下列线性滞后控制系统:

$$\dot{x}=A_0x+\sum_{i=1}^{N}A_ix(t-r_i)+Bu, \tag{2}$$

其中 $A_i(i=0,1,\cdots,N)$ 是 $n\times n$ 常数阵，$r_i>0$ 是滞后常数，$0<r_1<\cdots<r_N$.

记 $C^0=C([-r,0],R^n)$ 是由 $[-r,0]\to R^n$ 的全体连续函数所组成的线性空间，其范数定义为

$$\|\varphi\|=\sup_{\theta\in[-r,0]}|\varphi(\theta)|,\quad \varphi\in C^0.$$

本文于 1990 年 3 月 9 日收到.

对每个 $\varphi \in C^0$ 及控制量 u，记 $x(t)=x(t,t_0,\varphi,u)$ 是式(1)满足初始条件 $x_{t_0}=\varphi$ 的解，其中 x_t 定义为：

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\ \theta\in[-r,0].$$

设 $S=S(x)=Cx$，其中 C 是 $m\times n$ 待定常数阵，式 (1) 中的控制量 u 在超平面 $S=0$ 上是不连续的。现要设计切换平面 $S=0$ 及变结构控制律 u 使得式(1)的解趋于平衡态 $x=0$，同时还要求对系统参数变化及外部干扰具有一定的鲁棒性。

由 $\dot S=C\dot x=0$ 解得等效控制量 u_{eq}：

$$u_{eq}=-(CB)^{-1}C\int_{-r}^{0}\eta(\theta)x(t+\theta)d\theta, \tag{3}$$

这里假定 CB 可逆，将式(3)代入式(1)即得式(1)的理想滑动方程：

$$\begin{cases}\dot x=(I-B(CB)^{-1}C)\int_{-r}^{0}\eta(\theta)x(t+\theta)d\theta,\\ S=Cx=0.\end{cases} \tag{4}$$

在实际系统中由于存在各种非理想因素，因而实际滑动模运动不是准确地发生在平面 $S'=0$ 上，而是在它的邻域：$|S|\leqslant\delta$ 内，这里 δ 是某一正数。下面的定理 1 表明当边界层的厚度 δ 趋于零时，实际滑动模态 $x(t)$ 在任意有限时间内是一致收敛于理想滑动模态 $\bar x(t)$ 的。

在边界层 $|S|\leqslant\delta$ 内，运动方程式为

$$\dot x=\int_{-r}^{0}\eta(\theta)x(t+\theta)d\theta+B\bar u, \tag{5}$$

其中 $\bar u$ 是新定义的控制量，它考虑了某些非理想因素，因此有下面的定理。

定理 1. 假定在时间区间 $[t_0,T]$ 内，系统(5)的解都在边界层 $|S'|\leqslant\delta$ 内，$\bar x(t)$是理想滑动模态，则对于任意满足 $\|\varphi-\phi\|\leqslant a\delta$ $(a>0,\varphi,\phi\in C^0)$ 的初始函数φ,ϕ，必存在正数 b 使得式(4)与式(5)的解 $\bar x(t)=\bar x(t,t_0,\varphi,u_{eq})$ 与 $x(t)=x(t,t_0,\phi,\bar u)$ 满足

$$|x(t)-\bar x(t)|\leqslant b\delta,\ t\in[t_0,T].$$

证明. 在边界层 $|S'|\leqslant\delta$ 内有

$$\dot S(x)=C\dot x=C\int_{-r}^{0}\eta(\theta)x(t+\theta)d\theta+CB\bar u, \tag{6}$$

因此有

$$\bar u=-(CB)^{-1}C\int_{-r}^{0}\eta(\theta)x(t+\theta)d\theta+(CB)^{-1}\dot S(x). \tag{7}$$

将式(7)代入式(5)即得实际滑动模方程

$$\dot x=(I-B(CB)^{-1}C)\int_{-r}^{0}\eta(\theta)x(t+\theta)d\theta+B(CB)^{-1}\dot S(x), \tag{8}$$

于是在区间 $I_i=[t_0+ir,t_0+(i+1)r]$，$(i=0,1,\cdots)$ 上，式(4)与式(8)的解分别为

$$\bar x(t)=\bar x(t_0+ir)+(I-B(CB)^{-1}C)\int_{t_0+ir}^{t}\int_{-r}^{0}\eta(\theta)\bar x(s+\theta)d\theta ds, \tag{9}$$

$$x(t)=x(t_0+ir)+(I-B(CB)^{-1}C)\int_{t_0+ir}^{t}\int_{-r}^{0}\eta(\theta)x(s+\theta)d\theta ds$$

$$+ B(CB)^{-1}(S(x(t)) - S(x(t_0 + ir))). \tag{10}$$

将式(9)与式(10)相减，并利用条件 $|S(x(t))| \leqslant \delta$ 知

$$\begin{aligned}|x(t) - \bar{x}(t)| &\leqslant |x(t_0 + ir) - \bar{x}(t_0 + ir)| + 2|B(CB)^{-1}|\delta \\ &\quad + |I - B(CB)^{-1}C| \int_{t_0+ir}^{t}\int_{-r}^{0} |\eta(\theta)||x(s + \theta) - \bar{x}(s + \theta)|d\theta ds \\ &\leqslant \|x_{t_0+ir} - \bar{x}_{t_0+ir}\| + 2|B(CB)^{-1}|\delta \\ &\quad + |I - B(CB)^{-1}C| \int_{-r}^{0}|\eta(\theta)|d\theta \int_{t_0+ir}^{t}\|x_s - \bar{x}_s\| ds.\end{aligned} \tag{11}$$

由 Gronwall 不等式知

$$\|x_t - \bar{x}_t\| \leqslant (2|B(CB)^{-1}|\delta + \|x_{t_0+ir} - \bar{x}_{t_0+ir}\|)e^{|I-B(CB)^{-1}C|\int_{-r}^{0}|\eta(\theta)|d\theta(t-t_0-ir)}, \quad t \in I_i,\ i = 0,1,\cdots, \tag{12}$$

因此由初始条件 $\|\varphi - \phi\| \leqslant a\delta$ 及式(12)知，在每个区间 I_i 上，必存在正数 b_{i+1} 使得 $\|x_t - \bar{x}_t\| \leqslant b_{i+1}\delta$. 于是对任意 $T > t_0$，存在最小正整数 N 使得 $[t_0, T] \subset \bigcup_{i=0}^{N} I_i$，因此取 $b = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}\{b_{i+1}\}$，即知定理 1 的结论成立.

定理 1 表明用等效控制方法可以得到系统的滑动方程式，并且是唯一的. 这一结论对于滞后控制系统的综合是十分重要的，只要控制量 u 保证系统进入滑动模，就可利用理想滑动模方程(4)来研究系统(1)进入滑动模运动后的解的特性. 特别地，当 $r = 0$ 时，即为文献[1]中关于线性系统的相应结果.

当系统(1)除了受滞后影响外，还受其它外部因素干扰时，设其状态方程为

$$\dot{x} = \int_{-r}^{0} \eta(\theta)x(t + \theta)d\theta + Bu + Df(t). \tag{13}$$

由定理 1 知，其滑动方程为

$$\dot{x} = (I - B(CB)^{-1}C)\int_{-r}^{0} \eta(\theta)x(t + \theta)d\theta + (I - B(CB)^{-1}C)Df(t), \tag{14}$$

因此要使滑动过程与干扰无关，当且仅当

$$B(CB)^{-1}CDf(t) = Df(t), \tag{15}$$

也即 $\mathrm{rank}(B.D) = \mathrm{rank}(B)$.

三、综 合 方 法

作适当线性变换，将式(1)化为下列正则形式:

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \int_{-r}^{0} (\eta_{11}(\theta)x_1(t + \theta) + \eta_{12}(\theta)x_2(t + \theta))d\theta, \\ \dot{x}_2 = \int_{-r}^{0} (\eta_{21}(\theta)x_1(t + \theta) + \eta_{22}(\theta)x_2(t + \theta))d\theta + B_1u,\end{cases} \tag{16}$$

其中 $x_1 \in R^{n-m}$，$x_2 \in R^m$，B_1 是 $m \times m$ 非奇异阵.

首先设计切换平面 $S = Cx = C_1x_1 + C_2x_2 = 0$，其中 C_1 是 $m \times (n - m)$ 阵，C_2 是 $m \times m$ 非奇异阵，则由定理 1 知式(16)的滑动方程式为

$$\dot{x}_1 = \int_{-r}^{0} [\eta_{11}(\theta) - \eta_{12}(\theta) C_2^{-1} C_1] x_1(t+\theta) d\theta. \tag{17}$$

此处状态向量 $x_1 \in R^{n-m}$ 比原来系统的维数降低了 m 维。这对于滞后控制系统的综合是一大优点，因为它所对应的特征多项式

$$D(\lambda) = \mathrm{Det}\left(\lambda I - \int_{-r}^{0} (\eta_{11}(\theta) - \eta_{12}(\theta) C_2^{-1} C_1) e^{\lambda\theta} d\theta\right) = 0 \tag{18}$$

是超越的，维数的降低将大大减少确定式(18)特征根位置时的困难。

假定系统(17)可镇定。则可确定 C_1，C_2 使得式(18)的所有特征根均具负实部。特别地，对于系统(2)，目前已有许多实用的确定式(18)的特征根是否均具负实部的代数准则[7]。其次要设计变结构控制律以保证系统进入滑动模运动。由于

$$\dot{S} = C\int_{-r}^{0} \eta(\theta) x(t+\theta) d\theta + CBu, \tag{19}$$

取变结构控制律为

$$u = -(CB)^{-1}\left[C\int_{-r}^{0} \eta(\theta) x(t+\theta) d\theta + KS + \varepsilon \mathrm{sign} S\right], \tag{20}$$

其中 $K = \mathrm{diag}(k_i)_{m\times m}$，$\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_i)_{m\times m}$，$k_i, \varepsilon_i > 0$，$(i = 1, \cdots, m)$。则有

$$\dot{S} = -KS - \varepsilon \mathrm{sign} S. \tag{21}$$

因此控制律(20)可以保证式(1)在有限时间内进入滑动模。

对于比较常见的线性滞后控制系统(2)，显然

$$\dot{S} = CA_0 x + \sum_{i=1}^{N} CA_i x(t - r_i) + CBu. \tag{22}$$

取变结构控制律为

$$u = -(CB)^{-1} \sum_{i=0} \psi_i x(t - r_i), \tag{23}$$

其中 $r_0 = 0$，$\psi_i = (\psi_{ijk})_{m\times n}$ 的元素由下式确定:

$$\psi_{ijk} = \begin{cases} \alpha_{ijk}, & \text{当 } s_j \cdot x_k(t - r_i) > 0 \text{ 时}, \\ \beta_{ijk}, & \text{当 } s_j \cdot x_k(t - r_i) < 0 \text{ 时}, \end{cases} \tag{24}$$

并且 $\alpha_{ijk} > d_{ijk}$，$\beta_{ijk} < d_{ijk}, i = 0, \cdots, N$。$j = 1, \cdots, m, k = 1, \cdots, N$。其中$(d_{ijk}) = CA_i$。则此时系统(2)实现滑动模。有关控制律的进一步讨论。请参阅文献[5]。

参 考 文 献

[1] Utkin, V. I., Sliding Mode in Optimization and Control, Moscow, Nauka, 1981.
[2] Jamshidi, M. et al., Time-delay Systems, Analysis, Optimization and Applications, North-Holland, 1987.
[3] Hale, J. K., Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1977.
[4] Banks, S. P., Control Systems Engineering, Prentice-Hall Int. Ltd. London, 1986.
[5] 高为炳，非线性控制系统导论，科学出版社，1989.
[6] 高为炳，非线性系统的变结构控制，自动化学报，**15**(1989)，5，408—415.
[7] 胡跃明，线性多时滞差分微分系统全时滞稳定的代数判据，控制理论与应用，**4**(1987)，3，40—47.
[8] 胡跃明、周其节，抛物型分布参数系统的变结构控制，控制理论与应用，**8**(1991)，1，38—42.

VARIABLE STRUCTURE CONTROL OF CONTROL SYSTEMS WITH DELAY

HU YUEMING ZHOU QIJIE
(Dept. of Automation, South China University of Technology)

ABSTRACT

The variable structure control problems of control systems with delay are studied. The sliding equations and invariance conditions of sliding motions are obtained. The synthesis of the approach is also presented.

Key words: Time-delay systems; sliding mode; variable structure control.