极大代数意义下矩阵的特征值问题——一类离散事件动态系统运行周期的分析

王梅生 李彦平
(沈阳东北工学院自动控制系)

摘 要

在分析一类离散事件动态系统的运行周期及稳定性时，必须求解极大代数意义下矩阵的特征值及特征向量，这一直被认为是十分困难和繁复的工作. 本文给出了求任一方阵特征值及特征向量的十分简单易行的方法以及有关的定理.

关键词: 离散事件动态系统,极大代数,特征值,特征向量.

一、前 言

在文献[1,2]中,对一类有 n 台机床及 m 种工件的加工系统，用极大代数建立了状态方程及输出方程. 经多次迭代后,可得到第 l 次与第 $(k+l)$ 次输出向量间的关系

$$\boldsymbol{y}(k+l)=M^k\otimes\boldsymbol{y}(l). \tag{1}$$

系统能否进入稳态,呈现出周期性,以及系统在单位时间内输出的工件数，反映了系统的特性及生产能力. 由(1)式可知,它取决于矩阵M的特性，尤其是矩阵在极大代数意义下的特征值. Cohen 及 Karp 给出过计算特征值的方法,但只适用于不可约矩阵（这种矩阵只有一个特征值);对于可约矩阵,求其特征值必须解极大代数意义下的特征方程,十分复杂. 求解特征向量，则更为困难. 本文给出了求任一方阵的特征值及特征向量的十分简易的方法,同时还给出了有关的定理.

二、极大代数意义下矩阵的特征值问题

引理 1. 对任一N阶方阵 A,必存在固定正整数 n_0, d_{ij} 及常数 $\lambda_{ij}(i, j=1,2,\cdots,N)$, 使得当正整数 $n\geqslant n_0$ 时有

$$a_{ij}^{(n\otimes d_{ij})}=\lambda_{ij}^{d_{ij}}\otimes a_{ij}^{(n)}, \tag{2}$$

式中 $a_{ij}^{(n\otimes d_{ij})}$ 及 $a_{ij}^{(n)}$ 分别代表幂矩阵 $A^{n\otimes d_{ij}}$ 及 A^n 中的元素.

此引理表明,任一N阶方阵 A, 其幂矩阵元素的值,当幂次大于 n_0 以后，将呈现周期

本文于1990年4月12日收到.
本文曾在1990年全国控制理论及应用年会(杭州)上宣读.

性增加的规律．将 d_{ij} 及 λ_{ij} 分别称为 A 中元素 a_{ij} 的周期阶数及周期，并相应地记成 $d(a_{ij})$ 及 $\lambda(a_{ij})$.

引理 2. 对任一 N 阶方阵 A，必存在固定的正整数 n_0，d 及常数 $\lambda_i, \tilde{\lambda}_i (i = 1, 2, \cdots N)$，使得当正整数 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$I^T \otimes A^{n\otimes d} = I^T \otimes A^n \otimes \tilde{\Lambda} \tag{3}$$

及

$$A^{n\otimes d} \otimes I = \Lambda \otimes A^n \otimes I, \tag{4}$$

式中 $I = (0, \cdots, 0)^T_{N\times 1}$,

$$\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1^d, \lambda_2^d, \cdots, \lambda_N^d], \quad \tilde{\Lambda} = \mathrm{diag}[\tilde{\lambda}_1^d, \tilde{\lambda}_2^d, \cdots, \tilde{\lambda}_N^d].$$

该引理表明，任一方阵的幂矩阵，当幂次大于 n_0 以后，其各行、各列元素的最大值的取值也呈现周期性增加的规律．该引理的推论还给出了判断矩阵某行或某列的元素是否有相同的周期及周期阶数的方法．现将其中的一个方法引述如下．

推论 1. 有相同 $\tilde{\lambda}_i$（或 λ_i）的诸列（或诸行）中，至少有一列（或一行），其中的元素有相同的周期及周期阶数．

定理 1. 对任一 N 阶方阵 A，若其第 K 列元素有相同的周期及周期阶数 $\tilde{\lambda}_k$ 及 $\tilde{d}_k$，则 $\tilde{\lambda}_k$ 是 A 的一个右特征值，其对应的特征向量为

$$\tilde{X}_k = \tilde{\lambda}_k^{-1} \otimes A^n \otimes I_k \oplus \tilde{\lambda}_k^{-2} \otimes A^{n\otimes 1} \otimes I_k \oplus \cdots \oplus \tilde{\lambda}_k^{-\tilde{d}_k} \otimes A^{n\otimes \tilde{d}_k \otimes (-1)} \otimes I_k, \quad (n \geqslant n_0), \tag{5}$$

即

$$A \otimes \tilde{X}_k = \tilde{\lambda}_k \otimes \tilde{X}_k. \tag{6}$$

若其第 k 行元素有相同的周期及周期阶数 λ_k 及 d_k，则 λ_k 是 A 的一个左特征值，其对应的特征向量为

$$X_k = \lambda_k^{-1} \otimes I_k^T \otimes A^n \oplus \lambda_k^{-2} \otimes I_k^T \otimes A^{n\otimes 1} \oplus \cdots \oplus \lambda_k^{-d_k} \otimes I_k^T \otimes A^{n\otimes d_k \otimes (-1)}, \quad (n \geqslant n_0), \tag{7}$$

即

$$X_k \otimes A = \lambda_k \otimes X_k, \tag{8}$$

式中 I_k 为 N 维向量，其中的元素 a_i 为

$$a_i = \begin{cases} 0, & 当\ i = k, \\ -\infty, & 当\ i \neq k. \end{cases}$$

证明．若第 k 列元素有相同周期及周期阶数，则由引理 1 知，必存在一正整数 n_0，当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$A^{n\otimes \tilde{d}_k} \otimes I_k = \tilde{\lambda}_k^{\tilde{d}_k} \otimes A^n \otimes I_k. \tag{9}$$

将(5)式两边左乘 A，并将(9)式代入，即可得到(6)式．

同理易证此定理后半部分成立．

推论 2. 引理 2 中的 $\tilde{\lambda}_i$ 及 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ 分别是 A 的右特征值和左特征值．

由定理 1 及推论 1，不难证明此推论成立．

定理 1 及其推论提供了求任一方阵的特征值及特征向量的简单易行的方法．例如，若

$$A=\begin{bmatrix}3 & 6 & -\infty & -\infty\\ 0 & 3 & -\infty & -\infty\\ 5 & 8 & 2 & 10\\ 4 & 1 & 4 & 5\end{bmatrix},$$

则

$$A\otimes\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}6\\3\\10\\5\end{bmatrix},\quad A^2\otimes\boldsymbol{I}=A\otimes(A\otimes\boldsymbol{I})=\begin{bmatrix}9\\6\\15\\14\end{bmatrix},$$

$$A^3\otimes\boldsymbol{I}=A\otimes(A^2\otimes\boldsymbol{I})=\begin{bmatrix}12\\9\\24\\19\end{bmatrix},\quad A^4\otimes\boldsymbol{I}=A\otimes(A^3\otimes\boldsymbol{I})=\begin{bmatrix}15\\12\\29\\28\end{bmatrix}.$$

显见,此时 $n_0=1$, $d=2$, 当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$A^{n\otimes d}\otimes\boldsymbol{I}=\Lambda\otimes A^n\otimes\boldsymbol{I},$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}[3^2,3^2,7^2,7^2]$. 故$A$的左特征值为 3 和 7.

利用引理 2 的有关推论易知,A的第 1 行、第 3 行中的元素各有相同的周期及周期阶数。因此,由定理 1 易得对应于左特征值 3 的特征向量为

$$\boldsymbol{X}_1=3^{-1}\otimes\boldsymbol{I}_1^T\otimes A^3\oplus3^{-2}\otimes\boldsymbol{I}_1^T\otimes A^4=[6\ \ 9\ \ -\infty\ \ -\infty],$$

对应于左特征值 7 的特征向量为

$$\boldsymbol{X}_3=7^{-1}\otimes\boldsymbol{I}_3^T\otimes A^3\oplus7^{-2}\otimes\boldsymbol{I}_3^T\otimes A^4=[14\ \ 15\ \ 14\ \ 17].$$

类似地,也易求得A的右特征值及相应的特征向量.

用上述方法是否可求得任一方阵的全部特征值? 对此,有以下引理和定理.

引理 3. 1)不可约矩阵中所有元素有相同的周期及周期阶数.

2) 对一N阶标准形式的可约矩阵A

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c|c}A_{11} & & & -\infty\\ \hline A_{21} & A_{22} & & \\ \hline \cdots & \cdots & \ddots & \\ \hline A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk}\end{array}\right]_{N\times N},\qquad(10)$$

每一子块中的元素有相同的周期及周期阶数,分别记为 $\lambda(A_{ij})$及$d(A_{ij})(i,\ j=1,2,\cdots,k)$. 若记 $\lambda(A_{ii})=\lambda_i^0, d(A_{ii})=d_i^0(i=1,2,\cdots,k)$,并定义集合 S'_{ij} 为

$$S'_{ij}=\{m\,|\,A_{mu}\text{ 及 }A_{vm}\text{ 均为非零阵; }j<m<i,j\leqslant u<m,m<v\leqslant i\}$$

以及集合 S_{ij} 为

$$S_{ij}=S'_{ij}\cup\{i,j\},$$

则 $\lambda(A_{ij})$ 及 $d(A_{ij})(i\geqslant j)$ 的取值为

$$\lambda(A_{ij}) = \max_{l\in S_{ij}} (\lambda_l^0), \tag{11}$$

$$d(A_{ij}) = \max_{l\in S_{ij}} (d_l^0). \tag{12}$$

引理 4. 对(10)式之矩阵 A 和一 N 维向量 $\boldsymbol{X}$，如果存在正整数 n_0, d 和常数 $\lambda_i^{(x)}$ 及 $\tilde{\lambda}_i^{(x)}(i=1,2,\cdots,N)$，使得当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$\boldsymbol{X}^T \otimes A^{n\otimes d} = \boldsymbol{X}^T \otimes A^n \otimes \tilde{\Lambda}_x \tag{13}$$

及

$$A^{n\otimes d} \otimes \boldsymbol{X} = \Lambda_x \otimes A^n \otimes \boldsymbol{X}, \tag{14}$$

则

$$\lambda_i^{(x)} \in S \text{ 及 } \tilde{\lambda}_i^{(x)} \in S, \quad (i=1,2,\cdots,N),$$

式中 $\tilde{\Lambda}_x = \operatorname{diag}[(\tilde{\lambda}_1^{(x)})^d, (\tilde{\lambda}_2^{(x)})^d, \cdots, (\tilde{\lambda}_N^{(x)})^d]$,

$$\Lambda_x = \operatorname{diag}[(\lambda_1^{(x)})^d, (\lambda_2^{(x)})^d, \cdots, (\lambda_N^{(x)})^d], \quad S = \{\lambda_1^0, \lambda_2^0, \cdots, \lambda_k^0\}.$$

如果记 $S_\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}$，$S_{\tilde{\lambda}} = \{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \cdots, \tilde{\lambda}_N\}$，则由引理 2 和引理 4 可知：$S_\lambda \subseteq S$ 及 $S_{\tilde{\lambda}} \subseteq S$.

定理 2. 1)若(13)式中矩阵 $\tilde{\Lambda}_x = \tilde{\lambda}^d \otimes E$，则 $\tilde{\lambda} \in S_\lambda$；2)若(14)式中矩阵 $\Lambda_x = \lambda^d \otimes E$，则 $\lambda \in S_{\tilde{\lambda}}$. 式中 E 为单位阵.

证明要点：1)对于(10)式之矩阵 A，不失一般性，设 $\lambda_1^0 \geqslant \lambda_2^0 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k^0$. 由引理 4 知 $\tilde{\lambda} \in S$，因此

(a) 若 $\tilde{\lambda} = \lambda_1^0$，则由前两引理易证 $\tilde{\lambda} \in S_\lambda$.

(b) 若 $\tilde{\lambda} = \lambda_i^0 (i \neq 1, i \neq k)$，将 $\boldsymbol{X}$ 对应于矩阵 A 分块成 $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}_1 \vdots \boldsymbol{X}_2 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{X}_k]$，并设 $\boldsymbol{X}_i$ 的维数为 $N_i (i=1,2,\cdots,k)$，则此时必定是

$\boldsymbol{X}_j = [-\infty, \cdots, -\infty]_{1\times N_j}$，当 $j < i$ 时；

$A_{ij} = \varepsilon$（“零”矩阵），当 $j < i$ 时；

$A_{sj} = \varepsilon$，当 $j < i, s > j$，且 $\boldsymbol{X}_s$ 为非“零”向量时；

$A_{ss} = \varepsilon$，当 $S > i$ 且 $\boldsymbol{X}_s$ 为非“零”向量时.

由此，根据引理 3 和引理 4 可证 $\tilde{\lambda} \in S_\lambda$.

(c) 若 $\tilde{\lambda} = \lambda_k^0$，则有

$\boldsymbol{X}_j = [-\infty, \cdots, -\infty]_{1\times N_j}$，当 $j < k$ 时；

$A_{kj} = \varepsilon$ 当 $j < k$ 时.

据此，也可证 $\tilde{\lambda} \in S_\lambda$.

2) 类似地，可证此定理的后半部分.

定理 3. 用本文的方法可求得任一方阵的全部特征值.

证明. 设 λ 是 A 的任一右特征值，$\boldsymbol{X}$ 是对应的特征向量，即 $A \otimes \boldsymbol{X} = \lambda \otimes \boldsymbol{X}$，因而有

$$A^{n\otimes d} \otimes \boldsymbol{X} = \lambda^d \otimes A^n \otimes \boldsymbol{X},$$

于是由定理 2 可知 $\lambda \in S_{\tilde{\lambda}}$.

同理可证，任一左特征值 $\tilde{\lambda} \in S_\lambda$.

三、结 束 语

由以上分析可见

1）本文提供了求任一方阵的特征值及特征向量的十分简易的方法.

2）用本文的方法可求得矩阵的全部特征值.

参 考 文 献

[1] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J. P., Viot, M., Linear-system-theoretic Viewof Discrete Event Processes and It's Use for Performance Evaluation in Manufacturing, *IEEE. Trans.*,**AC-30**(1985), 3, 210—219.

[2] 王龙、郑大钟,线性离散事件动态系统控制的一些新结果,清华大学学报(自然科学版),**1**(1990),18—26.

THE EIGEN-PROBLEM OF MATRIX IN MAX-ALGEBRA —ANALYSIS FOR OPERATING PERIOD OF A CLASS OF DEDS

WANG MEISHENG LI YANPING

(Northeast University of Technology)

ABSTRACT

In this paper, eigen-problem of matrix in Max-algebra is discussed for analyzing the periodicity (or stability) of a class of discrete event dynamic systems (DEDS). Cohen and Karp have provided some algorithms to solve eigenvalue of matrix in Max-algebra. But these algorithms are only suitable to irreducible matrices. For reducible matrices, dominant and permanent of matrix must be calculated previously, which is very troublesome. In the paper, a new simple algorithm for determining eigenvalues and eigenvectors of a matrix in Max-algebra is presented by means of analyzing period behavior of the matrix.

Key words: Discrete event dynamic sy tems; Max-algebra; eigenvalue; eigenvector.