第17卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 17, No. 5
1991年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1991

多随从诱导策略[1)]

徐春晖 陈斑
(华中理工大学系统工程研究所，武汉)

摘 要

本文研究多随从诱导问题. 当随从进行 Nash 不合作对策时，得到了连续诱导策略的一个存在性充分条件与一种设计方法；当随从进行 Nash 协商对策时，得到了仿射型和连续型诱导策略的存在性充分条件与设计方法.

关键词: Stackelberg 对策，诱导策略，Nash 不合作平衡点，Nash 协商解.

一、引 言

诱导策略 (IS: Incentive Strategy) 作为一种引导个体的利己行为符合集体利益的手段[1,2,3]，近二十年来已引起人们的关注. 在研究多随从诱导问题时[4,5]，一般都假定随从之间是不合作的，且只限于讨论随从目标函数是凸函数时的仿射型诱导策略. 本文将讨论随从合作与不合作两种情况下的诱导问题.

二、随从不合作时的连续诱导策略

1. 问题的描述

不失一般性，设随从只有两个，分别记为 P_1 和 P_2，上级记为 P_0.

$u\in U$, $U=R^{n_0}$ 分别是 P_0 的决策变量与决策空间；$v_i\in V_i$, $V_i\subset R^{n_i}$ 分别是 P_i 的决策变量与决策空间，$i=1,2$；$J_i(u,v_1,v_2)$ 是 P_i 的代价目标函数，$i=0,1,2$.

Γ 是 P_0 的可行策略集，$(u^t,v_1^t,v_2^t)\in U\times V_1\times V_2$ 是 P_0 的期望结局，为了便于表达，本节假定 $v_i^t\in \mathring{V}_i$, $\mathring{V}_i$ 表示 V_i 的内部，$i=1,2$.

假设 P_0 宣布策略后 P_1 与 P_2 进行 Nash 不合作对策，记在策略 $\gamma\in\Gamma$ 下的 Nash 不合作平衡点组成的集合为 $N(\gamma)$. 则随从进行 Nash 不合作对策时的诱导问题可表达成：

寻找策略 $\gamma\in\Gamma$，使得 $N(\gamma)=\{(v_1^t,v_2^t)\}$，且 $u^t=\gamma(v_1^t,v_2^t)$. 满足此条件的 γ 称为在 (u^t,v_1^t,v_2^t) 处的诱导策略.

2. 连续诱导策略的存在性与设计

本文于 1989 年 11月20日收到.
1) 本文得到国家自然科学基金的部分资助.

记 $J_i(\gamma(v_1,v_2),v_1,v_2)=\bar{J}_i(v_1,v_2)$, $\forall\gamma\in\Gamma, i=1,2$. 众所周知，若 $\bar{J}_1,\bar{J}_2$ 是可微凸函数，则 $(v_1^t, v_2^t)\in N(\gamma)$ 的充要条件是: $\nabla_{v_i}\bar{J}_i(v_1^t,v_2^t)=0, i=1,2$. 沿文献[7]的思路，容易证明:

命题 1. 设可微凸函数 $e_1(v_1,v_2)$, $e_2(v_1,v_2)$ 具有下列性质: 1) $\nabla_{v_i}e_i(v_1, v_2)=0$, $i=1,2$, 只有唯一解 (v_1^t,v_2^t); 2) $e_i(v_1^t,v_2^t)=J_i(u^t,v_1^t,v_2^t)$, $i=1,2$. 若下列方程组

$$J_i(u,v_1,v_2)=e_i(v_1,v_2), i=1,2 \tag{2.1}$$

定义了一个单值连续映射 $\gamma:V_1\times V_2\to U$, 且 $u^t=\gamma(v_1^t,v_2^t)$, 则此 γ 就是(u^t,v_1^t,v_2^t)处的诱导策略.

命题 1 隐含了一种设计连续诱导策略的方法，其步骤如下:

1° 设计两个具有命题 1 中所述性质的可微凸函数 $e_1(v_1,v_2),e_2(v_1,v_2)$;

2° 以 u 为变量，v_1 和 v_2 为参量求解式(2.1)得 $u=\gamma(v_1,v_2)$, 若 γ 是单值连续映射，且 $u^t=\gamma(v_1^t,v_2^t)$, 则此 γ 就是 (u^t,v_1^t,v_2^t) 处的诱导策略.

由于此方法分两步，故称之为两步法. 第一步的方法较多，最简单的方法是将 $e_i(v_1,v_2)$ 设计成正定二次函数: $\frac{1}{2}(v_i-v_i^t)^TA(v_i-v_i^t)+J_i(u^t,v_1^t,v_2^t)$, $i=1,2$. 第二步求解式(2.1)的方法更多，一种方法是只以 u 的两个分量为变量来求解，u 的其它分量固定在期望值处(由于式(2.1)是两个方程的方程组，通常要求 $n_0\geqslant 2$).

记 u 的两分量为 u_a,u_b, 令 $u_{-ab}=(u_1,\cdots,u_{a-1},u_{a+1},\cdots,u_{b-1},u_{b+1},\cdots,u_{n_0})$, $u_{-ab}^t=(u_1^t,\cdots,u_{a-1}^t, u_{a+1}^t,\cdots, u_{b-1}^t, u_{b+1}^t,\cdots,u_{n_0}^t)$, $1\leqslant a<b\leqslant n_0$. $J_i(u,v_1,v_2)$ 可写成 $J_i(u_a,u_b,u_{-ab},v_1,v_2)$, $i=1,2$.

以 u_a,u_b 为变量，v_1 和 v_2 为参量求解

$$J_i(u_a,u_b,u_{-ab}^t,v_1,v_2)=e_i(v_1,v_2), i=1,2, \tag{2.2}$$

得

$$u_a=T_1(v_1,v_2), \quad u_b=T_2(v_1,v_2).$$

若 $T_1(\cdot),T_2(\cdot)$是 v_1 和 v_2 的单值连续函数，且 $u_a^t=T_1(v_1^t,v_2^t)$, $u_b^t=T_2(v_1^t,v_2^t)$, 则下列策略就是 (u^t,v_1^t,v_2^t) 处的连续诱导策略:

$$u_a=T_1(v_1,v_2),\quad u_b=T_2(v_1,v_2),\quad u_{-ab}=u_{-ab}^t. \tag{2.3}$$

不难看出，以上方法与文献[7]提出的隐函数法类似. 上述方法的特点是适用范围较广，使用灵活方便，但也有试探性. 若由式(2.1)或式 (2.2) 成功地解出了满足要求的映射 γ, 则此 γ 就是 (u^t,v_1^t,v_2^t) 处的诱导策略;若解不出所需的 γ, 则此方法失效，但不意味着在 (u^t,v_1^t,v_2^t) 处就不存在连续诱导策略. 下面讨论连续诱导策略的存在性.

由以上讨论可知，若式(2.2)定义了两个满足 $u_a^t=T_1(v_1^t,v_2^t)$, $u_b^t=T_2(v_1^t,v_2^t)$ 的单值连续函数 $T_1(\cdot)$ 和 $T_2(\cdot)$, 则在 (u^t,v_1^t,v_2^t) 处存在形如式(2.3)的诱导策略，证明见脚注 1).

定理 1. 若 u 中存在某两个分量 u_a,u_b, 使得 $J_i(u_a, u_b,u_{-ab}^t,v_1,v_2)$ 是连续函数，$i=1,2$, 且存在 $\varepsilon>0$, 使得对 $\forall h_1, h_2$ 有

---

1) 徐春晖，诱导决策理论及方法研究(第三章)，华中理工大学博士论文，1990 年.

$$\sum_{i=1}^{2}(J_i(u_a+h_1,u_b+h_2,u_{-ab}^t,v_1,v_2)-J_i(u_a,u_b,u_{-ab}^t,v_1,v_2))h_i\geqslant\varepsilon(h_1^2+h_2^2),\quad(2.4)$$

则在 (u^t,v_1^t,v_2^t) 处存在形如式(2.3)的连续诱导策略.

注 1. 在式 (2.4) 中令 $h_2=0$ 可推出 $h_1\to\pm\infty$ 时，$J_1(u_a+h_1,u_b,u_{-ab}^t,v_1,v_2)\to\pm\infty$，即 u_a 完全控制了 J_1. 同理，u_b 完全控制了 J_2. 因而定理 1 的意义可以这样理解：只要 u 中有两个分量分别对 J_1 和 J_2 有足够大的影响力，则上级只需利用此两分量就可以对两随从进行有效的诱导.

三、随从合作时的诱导策略

1. 问题的描述

假定只有两个随从 P_1 和 P_2，且上级 P_0 宣布策略后，P_1 与 P_2 之间的合作行为满足 Nash 协商公理[6].

对 $\forall\gamma\in\Gamma$，记 $J_i(\gamma(v_1,v_2),v_1,v_2)=\bar{J}_i(v_1,v_2)$，$i=1,2$. 令 $\hat{J}_1=\min\limits_{v_1}\max\limits_{v_2}\bar{J}_1(v_1,v_2)$，$\hat{J}_2=\min\limits_{v_2}\max\limits_{v_1}\bar{J}_2(v_1,v_2)$，$\Omega=\{(v_1,v_2)\in V_1\times V_2|\bar{J}_i(v_1,v_2)<\hat{J}_i,\ i=1,2\}$. 则 P_0 宣布策略 γ 后，P_1 与 P_2 的决策是下列问题的解：

$$\begin{aligned}&\max(\bar{J}_1(v_1,v_2)-\hat{J}_1)(\bar{J}_2(v_1,v_2)-\hat{J}_2),\\&s.t.(v_1,v_2)\in\Omega.\end{aligned}\quad(3.1)$$

注 2. 当 V_i 是有界闭凸集，$\bar{J}_i(v_1,v_2)$ 是 $V_1\times V_2$ 上的有界连续函数时 $(i=1,2)$，式(3.1)有唯一的最优解，证明可参见文献[6].

式(3.1)的解称为在策略 $\gamma\in\Gamma$ 下，P_1 与 P_2 的 Nash 协商解，记为 NBS (γ). 因而，P_1 与 P_2 合作时的诱导问题可表达成：

寻找策略 $\gamma\in\Gamma$，使得 $\mathrm{NBS}(\gamma)=(v_1^t,v_2^t)$，且 $u^t=\gamma(v_1^t,v_2^t)$. 满足此条件的 γ 称为 P_1 与 P_2 合作时 (u^t,v_1^t,v_2^t) 处的诱导策略，记为 ISC(Incentive Strategy with Cooperative fllowers).

2. ISC 的存在性与设计

直接设计 ISC 比较困难，下面利用 Nash 协商解的 Pareto 最优性把 ISC 的设计问题转化成一种易于解决的问题.

设 $\mathrm{NBS}(\gamma)=(v_1^1,v_2^1)$，而 (v_1^2,v_2^2) 是另一可行结局. 可以证明[6]：若 $\bar{J}_i(v_1^1,v_2^1)\geqslant\bar{J}_i(v_1^2,v_2^2)$，$i=1,2$，则 $\bar{J}_i(v_1^1,v_2^1)=\bar{J}_i(v_1^2,v_2^2)$，$i=1,2$. 这就是 Nash 协商解的 Pareto 最优性，利用这一性质可以推证(见作者的博士论文)：

命题 2. 若 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $\arg\{\min\bar{J}_1(v_1,v_2):(v_1,v_2)\in V_1\times V_2\}=\arg\{\min\bar{J}_2(v_1,v_2):(v_1,v_2)\in V_1\times V_2\}=(v_1^t,v_2^t)$，则 $\mathrm{NBS}(\gamma)=(v_1^t,v_2^t)$.

注 3. 命题 2 的含义是，若 γ 使得 J_1 和 J_2 在同一点 (v_1^t,v_2^t) 取理想值，即两随从都不可能从偏离 (v_1^t,v_2^t) 中得到好处，则 $\mathrm{NBS}(\gamma)=(v_1^t,v_2^t)$.

由命题 2 容易推出下面类似于命题 1 的结论.

命题 3. 设可微严格凸函数 $d_1(v_1,v_2)$，$d_2(v_1,v_2)$ 具有下列性质：1) $\nabla d_i(v_1^t,v_2^t)=$

$0, i=1,2$; 2) $d_i(v_1^t, v_2^t) = J_i(u^t, v_1^t, v_2^t), i=1,2$. 若下面方程组

$$J_i(u, v_1, v_2) = d_i(v_1, v_2), \quad i = 1,2 \tag{3.2}$$

定义了一个单值连续映射 $\gamma: V_1 \times V_2 \to U$, 且 $u^t = \gamma(v_1^t, v_2^t)$, 则此 γ 就是 (u^t, v_1^t, v_2^t) 处的 ISC.

命题 3 说明第二节提出的设计诱导策略的两步法也可用来设计连续 ISC, 只是第一步要设计的是两个具有命题 3 所述性质的可微严格凸函数 $d_1(v_1, v_2)$ 和 $d_2(v_1, v_2)$.

关于连续 ISC 的存在性,有如下结论(证明见作者的博士论文):

定理 2. 若定理 1 中的条件成立, 则在 (u^t, v_1^t, v_2^t) 处存在形如式(2.3)的连续 ISC.

当随从的目标函数具有凸性时,由命题 2 可直接推证下列结论(证明见作者的博士论文):

定理 3. 设 V_i 是有界闭凸集, $J_i(u, v_1, v_2)$ 是可微严格凸函数, $i=1,2$. 若存在满足下列关系的 $n_0 \times n_1$ 矩阵 Q_1 和 $n_0 \times n_2$ 矩阵 Q_2:

$$\begin{aligned} &\nabla_{v_1} J_1 + Q_1^T \nabla_u J_1 = 0, \quad \nabla_{v_1} J_2 + Q_1^T \nabla_u J_2 = 0, \\ &\nabla_{v_2} J_1 + Q_2^T \nabla_u J_1 = 0, \quad \nabla_{v_2} J_2 + Q_2^T \nabla_u J_2 = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

式(3.3)中所有梯度都是在 (u^t, v_1^t, v_2^t) 处计算的, 则对任意一对满足式(3.3)的 Q_1 和 Q_2, 下列策略都是 (u^t, v_1^t, v_2^t) 处的仿射型 ISC:

$$u = u^t + Q_1(v_1 - v_2^t) + Q_2(v_2 - v_2^t). \tag{3.4}$$

四、结 束 语

当上级对随从有足够大的影响力时,不管随从之间是进行 Nash 不合作对策,还是进行 Nash 协商对策,在任意可行结局处都存在连续的诱导策略.

本文只涉及上级的信息完全时的诱导问题, 上级信息不完全时的多随从诱导问题有待研究.

参 考 文 献

[1] Hildenbrand, W., eds., Advances in Economic Theory, Cambridge Univ. press, 1982.

[2] Basar, T., eds., Dymanic Games and Applications in Economics, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 265, Springer-Verlag, 1986.

[3] Ho, Y. C., Luh, P. B. & Olsder, G. J., A Control-theoretic View on Incentives, *Automatica*, 18(1982), 1, 167—179.

[4] Basar, T. & Selbuz, H., Cloosed-loop Stackelberg Strategies with Application in the Optimal Control of Multilevel Systems, IEEE Trans. AC-24(1979), 2, 166—179.

[5] Salman, M. A. & Cruz, J. B., Jr., An Incentive Model of Duopoly with Government Coordination, *Automatica*, 17(1981), 6, 821—829.

[6] Jones, A. J., Games Theory, Mathematical Model of Conflict (Chapter 5), John Wiley & Sons, 1980.

[7] 徐春晖,连续诱导策略设计的新方法;隐函数法,自动化学报,17(1991),No. 3.

INCENTIVE STRATEGIES WITH MULTIPLE FOLLOWERS

XU CHUNHUI CHEN TING
(*Institute of Systems Engineering Huazhong Univ. of Sci. and Tech., Wuhan*)

Abstract

The incentive problems that involve in multiple followers are delt with. When the followers play Nash noncooperative game, a sufficient existence condition and a design method of continuous incentive strategies are obtained. When the followers play Nash bargaining game, sufficient existence conditions and design methods of affine and continuous incentive strategies are also obtained.

Key words: Stackelberg game; incentive strategy; Nash noncooperative equilibrium; Nash bargaining solution.